Тема 11. Системы нелинейных уравнений

11.1. Постановка задачи

Задача отыскания решения нелинейного уравнения или системы нелинейных уравнений часто возникает как элементарный шаг при решении различных научных проблем. Сначала рассмотрим методы поиска решения (*корня*) $\tilde{x}$ единственного нелинейного уравнения

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

В подавляющем большинстве случаев представить решение уравнения (1) в виде конечной формулы оказывается невозможным. Даже для простого алгебраического уравнения n-й степени

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

явные формулы, выражающие его корни через коэффициенты с помощью конечного числа арифметических операций и извлечения корней степени не выше n, найдены лишь для $n \le 4$. Для уравнений пятой и более высоких степеней таких формул не существует. Этот замечательный факт, известный как *теорема Абеля*, был установлен в 30-х годах 19 века Н. Абелем и Э. Галуа.

Невозможность найти точное решение нелинейного уравнения кажется огорчительной. Однако нужно признать, что желание найти точное числовое значение корня вряд ли следует считать разумным. Во-первых, в реальных исследованиях зависимость $y = f(x)$ является лишь приближённым описанием, моделирующим истинную связь между переменными x и y. Поэтому точное решение уравнения (1) всё равно является лишь приближением для того значения переменной x, которое в действительности соответствует значению $y = 0$. Во-вторых, даже если уравнение (1) допускает возможность выражения решения в виде конечной формулы, то результат вычисления по этой формуле с неизбежностью содержит вычислительную погрешность и поэтому является приближённым. Например, при решении квадратного уравнения приходится приближённо извлекать квадратный корень.

11.2. Поиск корня уравнения делением пополам

Пожалуй, простейшим алгоритмом поиска корня уравнения (1) является

Метод деления пополам отрезка локализации корня. Для выбора начального отрезка локализации $[a_0, b_0]$ обычно вычисляют таблицу значений функции вида $y_i = f(u_i),\ i = 1, \ldots, n,$ или строят её график. В случае использования таблицы о наличии на отрезке $[u_{i-1}, u_i]$ корня судят по перемене знака функции на концах отрезка. В качестве начального приближения корня берётся середина отрезка локализации: $x_0 = (a_0 + b_0)/2.$ Затем в качестве нового отрезка локализации $[a_1, b_1]$ берётся тот из отрезков $[a_0, x_0]$ и $[x_0, b_0]$, на концах которого выполняется условие $f(a_1)f(b_1) < 0,$ т. е. на концах которого функция принимает значения разных знаков. Для произвольной непрерывной функции $f(x)$ этот отрезок обязательно содержит корень. Середина отрезка $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ даёт новое приближение к корню $\tilde{x}$. Процесс продолжается до тех пор, пока длина очередного отрезка локализации не станет меньше заданной величины абсолютной погрешности Δ.

Упражнение. Запрограммируйте алгоритм метода деления пополам на Visual Basic и найдите корень уравнения $4(1 - x^2) - e^x = 0$ на отрезке $[0, 1]$ с погрешностью $\Delta = 0{,}001$.

Определение. *Кратностью* корня $\tilde{x}$ называется такое натуральное число m, что

$$f(\tilde{x})=0,\ f'(\tilde{x})=0,\ \ldots,\ f^{(m-1)}(\tilde{x})=0,\ f^{(m)}(\tilde{x})\neq 0.$$

Например, 0 является корнем кратности 2 для уравнения $x^2=0.$ Метод деления пополам неприменим для поиска корней чётной кратности.

Не всегда для успешного отыскания корня уравнения необходимо установить отрезок локализации. Часто вместо отрезка локализации достаточно вычислить достаточно хорошее приближение к искомому корню. Одним из эффективных и обобщаемых на многомерный случай алгоритмов поиска такого приближения является метод Ньютона.

11.3. Метод Ньютона (метод касательных)

Выведем расчётную формулу метода из простых геометрических соображений (рис. 1). Пусть x_0 — начальное приближение к искомому корню $\tilde{x}$ уравнения $f(x)=0.$ Проведём касательную к графику функции $y=f(x)$ в точке с координатами $(x_0,\ f(x_0))$ и за новое приближение x_1 примем координату пересечения этой касательной с осью абсцисс. Аналогично, за приближение x_2 примем координату пересечения с осью абсцисс касательной в точке $(x_1,\ f(x_1))$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ приближений к корню $\tilde{x}$.

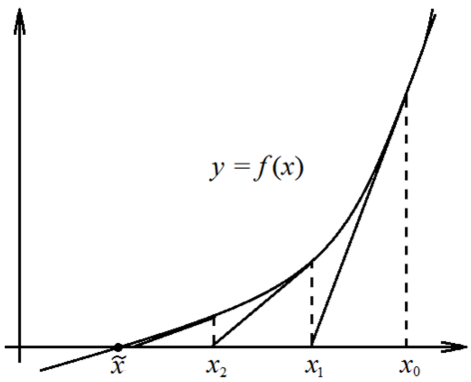

Рис. 1

Согласно формуле (4) из темы 4 уравнение касательной, проведённой к графику функции $y=f(x)$ в точке $(x_n,\ f(x_n))$, имеет следующий вид:

$$y=f(x_n)+f'(x_n)(x-x_n). \tag{2}$$

Полагая $y=0$ в формуле (2), замечаем, что координата x_{n+1} точки пересечения касательной с осью абсцисс удовлетворяет уравнению

$$f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)=0. \tag{3}$$

Выражая из него x_{n+1}, получим при выполнении условия $f'(x_n)\neq 0$ расчётную формулу ***метода Ньютона***:

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n). \tag{4}$$

Ввиду геометрической интерпретации метод Ньютона также называют *методом касательных*.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - a,$ где параметр $a > 0.$ Тогда $f'(x) = 2x,$ и формула (4) приобретает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Этот алгоритм вычисления квадратного корня из числа a уже встречался ранее в конце темы 2.

Какие условия обеспечивают сходимость последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ к корню $\tilde{x}$?

Теорема. Если $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция, то существует такая малая окрестность корня $\tilde{x}$, что при выборе начального приближения x_0 из этой окрестности итерационная последовательность приближений метода Ньютона, задаваемая формулой (4), сходится к корню, не выходя за пределы окрестности.

Известно, что для корней кратности 1 выполняется следующая оценка скорости сходимости:

$$| x_n - \tilde{x} | \le Cq^{2^n},$$

где $C > 0$ и $0 < q < 1$ — некоторые константы. Это неравенство означает, что скорость сходимости больше скорости сходимости геометрической прогрессии. Число верных знаков после запятой у приближений метода Ньютона, как правило, удваивается с каждой итерацией.

Когда x_n находится уже достаточно близко от корня $\tilde{x}$ кратности 1, начинает выполняться неравенство

$$| x_n - \tilde{x} | \le | x_n - x_{n-1} |.$$

На основе этого неравенства можно сформулировать условие окончания поиска корня с заданной абсолютной погрешностью Δ.

Упражнение. Запрограммируйте алгоритм метода Ньютона на Visual Basic и найдите с его помощью корень уравнения $4(1 - x^2) - e^x = 0$ погрешностью $\Delta = 0{,}001.$ Используйте в качестве начальных приближений числа 1 и $-1.$ Постройте в Excel график функции на отрезке [–2, 1].

11.4. Частные производные, матрица Якоби

Чтобы обобщить метод Ньютона на системы нелинейных уравнений, необходимо ввести несколько новых базовых понятий математического анализа: частная производная функции нескольких переменных, градиент, матрица Якоби.

Определение. *Частной производной* функции $f(\boldsymbol{x})$ по переменной x_i в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ называется

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + d_n, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\boldsymbol{x})}{d_n},$$

где d_n — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям $d_n \ne 0$ и $d_n \to 0.$

Согласно этому определению при вычислении частной производной по переменной x_i все остальные переменные рассматриваются как константы.

Пример. Найдём частные производные по переменным x и y функции $f(x,y)=x^2+xy+2y$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=2x+y+0=2x+y; \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0+x+2=x+2.$$

Упражнение. Найти частные производные по x, y, z функции:

а) $f(x,y,z)=x^3e^{-y}+\sin z$; б) $f(x,y,z)=x^4\cos y+e^{-z}$.

Определение. *Градиентом* функции $f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0\in R^n$ называется вектор

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1}\\ \dots\\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix} \tag{5}$$

Упражнение. Найти градиент в точке $(2,0)$ функции: а) $f(x,y)=x^2+e^y$; б) $f(x,y)=x^3e^y$.

Для гладких функций n переменных $f(x_1,\dots,x_n)$ имеет место следующее ***обобщение формулы Тейлора***:

$$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0), \tag{6}$$

где остаточный член $r(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)$ пренебрежимо мал для достаточно близких к точке $\boldsymbol{x}_0$ векторов $\boldsymbol{x}$.

Определение. Уравнение

$$z=f(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{g}^T(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$$

определяет *касательную гиперплоскость* (размерности *n*) к поверхности $z=f(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$.

Упражнение. Найти уравнение касательной плоскости в точке (1, 1) к поверхности:
а) $z=xy$; б) $z=x^2+y^2$.

Теперь рассмотрим систему из *n* нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0\\ f_2(x_1,\dots,x_n)=0\\ \qquad\vdots\\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0\end{cases} \tag{7}$$

Определение. *Матрицей Якоби* системы уравнений (7) в точке $\boldsymbol{x}_0\in R^n$ называется матрица размерности *n* x *n*, строками которой служат транспонированные градиенты $\boldsymbol{g}_i^T(\boldsymbol{x}_0)$ функций $f_i(\boldsymbol{x}),\ i=1,\dots,n$:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{x}_0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{g}_1^T(\boldsymbol{x}_0)\\ \boldsymbol{g}_2^T(\boldsymbol{x}_0)\\ \vdots\\ \boldsymbol{g}_n^T(\boldsymbol{x}_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_n(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}.$$

Упражнение. Вычислите матрицу Якоби в точке (1, 2) для системы уравнений

$$\begin{cases} -x^2 + y = 0 \\ x^2 + y - 2 = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Теперь обобщим метод Ньютона. Предположим, что начальное приближение $\boldsymbol{x}_0$ находится близко к неизвестному решению $\tilde{\boldsymbol{x}}$ системы уравнений (7). Заменим в системе (7) каждую из функций $f_i(\boldsymbol{x})$ линейной частью её разложения по формуле Тейлора (6) в точке $\boldsymbol{x}_0$:

$$\begin{cases} f_1(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}_1^T(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}_2^T(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{g}_n^T(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = 0 \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы является многомерным аналогом формулы (3). Эту систему можно кратко записать в матричной форме:

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \begin{pmatrix} f_1(\boldsymbol{x}_0) \\ f_2(\boldsymbol{x}_0) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}_0) \end{pmatrix}.$

Формула (9) представляет собой систему линейных уравнений относительно неизвестного вектора $\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$. Предполагая, что эта система имеет единственное решение $\boldsymbol{d}_0$, определим новое приближение к корню $\tilde{\boldsymbol{x}}$ формулой $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{d}_0$. Аналогично, на *n*-м шаге алгоритма находится решение $\boldsymbol{d}_n$ системы линейных уравнений

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{d}_n = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n), \tag{10}$$

затем следующее приближение к корню $\tilde{\boldsymbol{x}}$ определяется как $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{d}_n$. Эту формулу можно записать в виде

$$\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n - \mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{x}_n)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n). \tag{11}$$

Формула (11) представляет собой многомерное обобщение формулы (4), но для применения метода Ньютона обратные матрицы вычислять не требуется — достаточно решать систему (10).

Так же, как и в одномерном случае, приближения $\boldsymbol{x}_n$ метода Ньютона в многомерном случае быстро сходятся, если $\boldsymbol{x}_0$ находится в достаточно малой шаровой окрестности корня $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Отметим также, что при отсутствии явных формул для частных производных, входящих в матрицу Якоби, на практике их обычно заменяют на *разностные аппроксимации*

$$\frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + d, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(\boldsymbol{x})}{d},$$

где d — малое число (скажем, $d = 0{,}001$).

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Найти с абсолютной погрешностью $\Delta = 0{,}0001$ все корни уравнения $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ методом деления пополам. (*Указание*. Сначала локализуйте корни с помощью графика в Excel.)

11.2. Найти решение системы (8) методом Ньютона. (*Указание*. Получите явную формулу для шага $\boldsymbol{d}_n$ и напишите программу на Visual Basic.)

11.3.* Используя метод деления пополам, найти границу окрестности сходимости метода Ньютона, применяемого для решения уравнения $(e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) = 0.$