Тема 9. Системы линейных уравнений

9.1. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Сначала рассмотрим систему из двух линейных уравнений. Например, такую:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 10 \\ 2x_1 + 5x_2 = 12 \end{cases}$$

Понятно, что если умножить на некоторую константу все коэффициенты одного из уравнений, то получим эквивалентную систему в том смысле, что решение системы будет тем же самым, что и у исходной системы. Умножим все коэффициенты второго уравнения на 2, чтобы коэффициент при переменной x_1 стал таким же, как в первом уравнении:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 10 \\ 4x_1 + 10x_2 = 24 \end{cases}$$

Поскольку решение (x_1, x_2) удовлетворяет каждому из уравнений системы, то оно также удовлетворяет и разности этих уравнений. Поэтому допустимо заменить второе уравнение в системе на разность второго и первого:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 10 \\ (4-4)x_1 + (10-3)x_2 = 24-10 \end{cases} = \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 10 \\ \qquad\ \ 7x_2 = 14 \end{cases}$$

В результате переменная x_1 исчезла из второго уравнения. Из него находим, что $x_2 = 2$. Подставив найденное значение в первое уравнение, получим равенство

$$4x_1 + 3 \cdot 2 = 10,$$

откуда следует, что $x_1 = 1$. Система уравнений решена.

Теперь рассмотрим систему из трёх уравнений. Например, такую:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

Сначала умножим все коэффициенты второго уравнения на 2 и все коэффициенты третьего уравнения на 4:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ 4x_1 + 10x_2 + 2x_3 = 30 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 24 \end{cases}$$

Далее заменим второе уравнение на разность второго и первого, а третье уравнение — на разность третьего и первого:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ \quad 7x_2 + x_3 = 17 \\ \quad x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

В результате переменная x_1 исчезла из второго и третьего уравнений. Временно забудем о первом уравнении и решим подсистему, состоящую из второго и третьего уравнений, в которых присутствуют лишь два неизвестных: x_2 и x_3. Для этого умножим третье уравнение на 7:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ \quad 7x_2 + x_3 = 17 \\ \quad 7x_2 + 21x_3 = 77 \end{cases}$$

Теперь заменим третье уравнение на разность третьего и второго уравнений:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 13 \\ \quad 7x_2 + x_3 = 17 \\ \quad 20x_3 = 60 \end{cases}$$

В результате переменная x_2 исчезла из третьего уравнения, и система уравнений оказалась преобразованной к треугольному виду. Из третьего уравнения имеем $x_3 = 3.$ Подставив найденное значение x_3 во второе уравнение, получим равенство

$$7x_2 + 3 = 17,$$

из которого находим, что $x_2 = 2.$ Подставим найденные значения x_2 и x_3 в первое уравнение:

$$4x_1 + 3 \cdot 2 + 3 = 13.$$

Отсюда $x_1 = 1.$ Система уравнений решена.

Аналогичным подход, который называется ***методом Гаусса***, можно использовать для решения систем, состоящих из n произвольных линейных уравнений:

а) сначала исключаем неизвестные $x_i,\ i = 1, \ldots, n-1,$ из уравнений с номерами $i+1, \ldots, n$ («прямой ход»);

б) из последнего уравнения находим значение x_n;

в) последовательно подставляя уже найденные значения неизвестных $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2$ в предыдущее уравнение, вычисляем $x_{n-1}, \ldots, x_1$ («обратный ход»).

Упражнение. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

Задача 9.2 показывает, что не всякая система линейных уравнений имеет решение, а если и имеет, то решение не обязательно является единственным.

9.2. Обратная матрица

Произвольную систему из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

можно кратко записать в матричном виде:

$$\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$

Основным достоинством матричной формы записи является её компактность и удобство использования в сложных формулах, задающих преобразования векторов.

Рассмотрим векторы

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица $\mathbf{E}$, составленная из столбцов $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_n$, называется *единичной*:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для любых матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ верны формулы $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$.

Для квадратной матрицы $\mathbf{A}$ определим понятие обратной матрицы, которую обозначим через $\mathbf{A}^{-1}$. Методом Гаусса найдём n решений $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ линейных систем вида $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Составим матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ из столбцов $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$. Тогда в соответствии с определением матричного умножения будет верно равенство

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}. \qquad (1)$$

Определение. Матрица $\mathbf{A}^{-1}$, удовлетворяющая (1), называется *обратной к матрице* $\mathbf{A}$.

Упражнение. Вычислите обратную матрицу к матрице $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что обратная матрица существует не для всякой квадратной матрицы. Например, её нет для матрицы, заполненной нулями.

Запишем матричное уравнение $\mathbf{XA}=\mathbf{E}$ относительно неизвестной матрицы $\mathbf{X}$. Умножив обе части этого уравнения справа на матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ ввиду ассоциативности матричного умножения и формулы (1), получим, что $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}$. Тем самым установлено равенство

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{E}. \tag{2}$$

Из формулы (2) следует, что матрица $\mathbf{A}$ служит обратной для матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, т. е. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$.

Умножив обе части матричного уравнения $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ слева на матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ ввиду ассоциативности матричного умножения и формулы (2), выводим, что решение $\boldsymbol{x}$ системы линейных уравнений $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ представляется в виде $\boldsymbol{x}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Это представление удобно использовать, если требуется решать системы $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_k$ для большого количества разных правых частей $\boldsymbol{b}_k$: зная матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ легко находим решение $\boldsymbol{x}_k=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}_k$.

9.3. Линейно независимые векторы

Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ — векторы из пространства R^n, $m \le n$. Рассмотрим линейные комбинации этих векторов $x_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_m\boldsymbol{a}_m$ с произвольными действительными коэффициентами $x_1, \ldots, x_m$.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ называются *линейно независимыми*, если из выполнения равенства $x_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ — нулевой вектор, следует, что $x_1=0, \ldots, x_m=0$.

Поясним смысл термина «линейная независимость». Если векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ не являются линейно независимыми, то найдётся такой номер j ($1 \le j \le m$), что $x_j \ne 0$, но $x_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+x_m\boldsymbol{a}_m=\mathbf{0}$. Тогда, разделив на x_j, получим равенство $\boldsymbol{a}_j=(-x_1/x_j)\boldsymbol{a}_1+\ldots+(-x_m/x_j)\boldsymbol{a}_m$, означающее, что вектор $\boldsymbol{a}_j$ является линейной комбинацией остальных векторов, т. е. линейно зависит от них.

Например, два вектора, лежащие на одной прямой или три вектора, лежащие в одной плоскости, очевидно, линейно зависимы.

Как узнать, являются векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независимыми или не являются? Запишем условие линейной независимости в матричном виде:

$$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \ldots + x_m\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Данное представление равносильно системе из n уравнений от m неизвестных $x_1, \ldots, x_m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m=0 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2m}x_m=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m=0 \end{cases}$$

Эту систему можно решать методом Гаусса. Если окажется, что единственным решением является набор из m нулей, то векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ линейно независимы.

В частности, при $m=n$ в случае линейной независимости векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ левая часть системы приведётся «прямым ходом» метода Гаусса к треугольному виду. В противном случае она примет форму трапеции. Составим матрицу $\mathbf{A}$ из столбцов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$. Приводимость к треугольному виду обеспечивает существование и единственность решения линейной системы $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ для произвольного вектора $\boldsymbol{b}$, а, следовательно, существование обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$.

Упражнение. Выясните, являются ли линейно независимыми векторы (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 5, 7).

9.4. Ортонормированные базисы

Напомним, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются ортогональными, если $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = 0.$ Эвклидова длина вектора $\boldsymbol{a}$ определяется формулой $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle} = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}.$

Определение. Говорят, что векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ образуют *ортонормированный базис*, если они попарно ортогональны, причём их длины равны 1.

Очевидно, что определённые выше векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ образуют ортонормированный базис, который называется *стандартным базисом* пространства $R^n.$ Смысл термина «базис» заключается в том, что произвольный вектор $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ представляется в виде линейной комбинации базисных векторов: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ (*раскладывается по базису*).

Существуют ли в R^n другие ортонормированные базисы? Да, их бесконечно много. В стандартном курсе линейной алгебры доказывается, что произвольный вектор длины 1 можно дополнить до ортонормированного базиса, построив ещё $(n-1)$ векторов.

Теперь получим формулу замены координат при переходе к ортонормированному базису. Рассмотрим произвольную точку $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n).$ Какие координаты $\tilde{\boldsymbol{x}}=(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ имеет она в заданном ортонормированном базисе $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$? Согласно разделу 8.3 для любого i $(1 \le i \le n)$ длина проекции на ось с направляющим вектором $\boldsymbol{c}_i$, где $|\boldsymbol{c}_i|=1,$ выражается формулой

$$\tilde{x}_i = \frac{\langle \boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{x}\rangle}{|\boldsymbol{c}_i|} = \langle \boldsymbol{c}_i, \boldsymbol{x}\rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i\rangle = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{c}_i, \quad \text{где } i=1, \ldots, n.$$

В матричном виде все эти n равенств вместе записываются следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^T = \boldsymbol{x}^T\mathbf{C}, \tag{3}$$

где столбцами матрицы $\mathbf{C}$ служат базисные векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$. Формула (3) называется ***формулой замены координат*** при переходе к новому ортонормированному базису $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$.

Упражнение. Как выглядит формула, эквивалентная формуле (3), в которой участвует не вектор-строка $\boldsymbol{x}^T$, а вектор-столбец $\boldsymbol{x}$? (*Используйте свойства матричного умножения.*)

Пример. Для точки $\boldsymbol{x}^T=(1, 3)$ найдём её координаты в ортонормированном базисе, состоящем из векторов $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ и $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Согласно формуле (3) имеем:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^T = (\tilde{x}_1 \;\; \tilde{x}_2) = (1 \quad 3)\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = (4/\sqrt{2} \;\; 2/\sqrt{2}) = (2\sqrt{2} \;\; \sqrt{2}).$$

9.5. Подпространства произвольных размерностей

Напомним, что подпространством, ортогональным к вектору $\boldsymbol{a}$, в разделе 8.1 называлось множество всех точек $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют условию $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = 0.$ Используя ортонормированный базис $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, можно обобщить понятие подпространства.

Определение. Подпространство размерности $(n-k)$ в R^n определяется как множество концов векторов, ортогональных векторам $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k$. Иначе говоря, подпространство — это множество точек $\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих одновременно k уравнениям вида

$$\begin{cases} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_1 \rangle = 0 \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_2 \rangle = 0 \\ \quad \ldots \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_k \rangle = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, подпространство размерности $(n-k)$ представляет собой пересечение k подпространств размерности $(n-1)$.

Подпространство, определённое системой уравнений (4), можно задать иначе. Оно является множеством линейных комбинаций с произвольными числовыми коэффициентами $t_{k+1}, \ldots, t_n$ базисных векторов $\boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_n$:

$$\boldsymbol{x} = t_{k+1}\boldsymbol{c}_{k+1} + \ldots + t_n\boldsymbol{c}_n. \tag{5}$$

Докажем это утверждение. Сначала установим, что любой вектор $\boldsymbol{x}$ вида (5) удовлетворяет каждому из уравнений системы (4). Действительно, для любого $i=1, \ldots, k$ в силу ортогональности вектора $\boldsymbol{c}_i$ всем векторам $\boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ имеем:

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}_i \rangle = t_{k+1}\langle \boldsymbol{c}_{k+1}, \boldsymbol{c}_i \rangle + \ldots + t_n\langle \boldsymbol{c}_n, \boldsymbol{c}_i \rangle = t_{k+1}\cdot 0 + \ldots + t_n \cdot 0 = 0.$$

Обратно, выполнение всех равенств из (4) для некоторого вектора $\boldsymbol{x}$ означает, что он имеет нулевые проекции по базисным осям $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k$. Значит, $\boldsymbol{x}$ находится в подпространстве, порождённом остальными базисными векторами $\boldsymbol{c}_{k+1}, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, и имеет там некоторые координаты $t_{k+1}, \ldots, t_n$ по соответствующим осям.

Частным случаем одномерного подпространства является ось

$$\boldsymbol{x} = t_n\boldsymbol{c}_n$$

с направляющим вектором $\boldsymbol{c}_n$. Другим частным случаем служит двумерное подпространство

$$\boldsymbol{x} = t_{n-1}\boldsymbol{c}_{n-1} + t_n\boldsymbol{c}_n,$$

состоящее из всевозможных линейных комбинаций базисных векторов $\boldsymbol{c}_{n-1}$ и $\boldsymbol{c}_n$.

Определение. *Гиперплоскостью размерности* $(n-k)$ называется множество, получаемое сдвигом $(n-k)$–мерного подпространства на некоторый вектор $\boldsymbol{b}$.

В частности, множество точек из пространства R^n вида

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$

где параметр t принимает произвольные действительные значения, называется *n-мерной прямой* с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$, проходящей через точку $\boldsymbol{b}$.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Доказать тождество $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ для произвольных квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, имеющих обратные.

9.2. Решить системы линейных уравнений (т. е. найти в R^3 множество точек, координаты которых (x_1, x_2, x_3) удовлетворяют всем уравнениям системы):

а) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

9.3. Столбцами матрицы $\mathbf{C}$ служат векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$, образующие ортонормированный базис. Доказать: а) $\mathbf{C}^T$ является обратной матрицей для $\mathbf{C}$; б) векторы $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ линейно независимы.

9.4*. Выяснить, пересекаются ли прямые $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{x} = t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

9.5*. Найти направляющий вектор прямой, заданной в виде пересечения двух плоскостей

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

(*Указание*. Сначала найдите координаты двух разных точек, лежащих на прямой.)