Тема 8. Векторы и матрицы

8.1. Оси и гиперплоскости, ортогональные осям

Из школьного курса физики известно понятие вектора — направленного отрезка. Например, векторами представляются скорости или силы.

Векторы задаются координатами их концевой точки. Рассмотрим в R^3 два вектора: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$. (Векторы будем обозначать ***полужирным*** шрифтом.) Над векторами можно выполнять некоторые алгебраические операции. Например, умножать вектор $\boldsymbol{a}$ на число *t*, складывать векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: $t\boldsymbol{a} = (ta_1, ta_2, ta_3)$, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$.

В R^n также удобно использовать векторную символику. Например, *n*-мерный аналог *оси* (прямой линии, проходящей через начало координат в R^3), определяется следующим образом: *n-мерной осью с направляющим вектором* $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется множество точек в R^n, координаты которых удовлетворяют условию $t\boldsymbol{a} = (ta_1, ta_2, \ldots, ta_n)$, где числовой параметр t пробегает все действительные значения.

Длина вектора $\boldsymbol{a}$ определяется формулой $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$. Множество концевых точек всех векторов длины *r* образуют в R^n *n-мерную сферу* радиуса r. Произвольное направление (ось) в пространстве R^n задаётся выбором некоторой точки $\boldsymbol{c}$ на сфере радиуса 1: $|\boldsymbol{c}| = 1$. Необходимо отметить, что то же самое направление задаётся также и вектором $-\boldsymbol{c}$.

Ещё одной алгебраической операцией над векторами является *скалярное произведение*: паре векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ сопоставляется действительное число (скаляр), вычисляемое по формуле

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Многомерным обобщением понятия перпендикулярности векторов на плоскости или в трёхмерном пространстве является ортогональность *n*-мерных векторов.

Определение. Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называются *ортогональными*, если $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0$.

Используя понятие ортогональности, определим в R^n множество точек, которое служит обобщением плоскости, проходящей через начало координат в трёхмерном пространстве.

Определение. *Подпространством*, *ортогональным к вектору* $\boldsymbol{a}$, называется множество всех точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют условию $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0$.

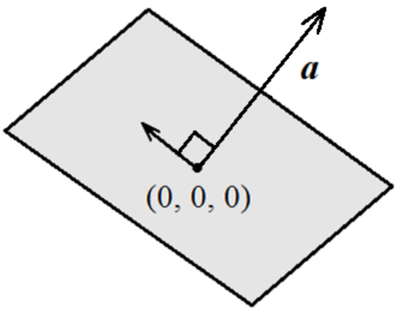

Рис. 1

Иначе говоря, подпространство, ортогональное к вектору $\boldsymbol{a}$, образовано концами всех векторов, которые ортогональны заданному вектору $\boldsymbol{a}$ (см. рис. 1 для *n* = 3).

Согласно приведённому определению, любое подпространство содержит начало координат $(0, \ldots, 0)$. Теперь рассмотрим множества точек в R^n, которые получаются из подпространств сдвигами (параллельными переносами). Они называются гиперплоскостями.

Определение. *Гиперплоскостью, ортогональной к вектору* $\boldsymbol{a}$ *и проходящей через точку* $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$, называется множество точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условию

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} \rangle = 0 \quad \text{или} \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle - \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0.$$

Очевидно, что точка $\boldsymbol{b}$ лежит на гиперплоскости: $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{0} \rangle = 0.$ Можно представлять себе, что начало координат $\boldsymbol{0}$ перемещается в точку $\boldsymbol{b}$ (рис. 2).

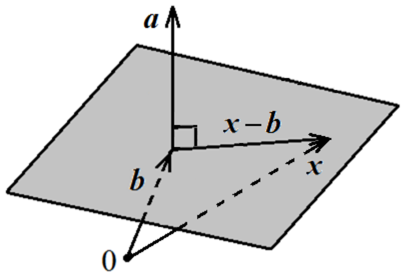

Рис. 2

Положив $c = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, получим ещё одно уравнение, задающее гиперплоскость:

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle - c = 0 \quad \text{или} \quad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{x} \rangle = c. \tag{1}$$

В координатной форме это уравнение имеет вид

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = c.$$

Гиперплоскость, заданная формулой (1), служит общей границей двух *полупространств*:

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \geq c \quad \text{и} \quad a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leq c.$$

Очевидно, что отдельные точки или оси при n > 1, имеют нулевой n-мерный объём. Объём полупространств бесконечен. А вот пересечения полупространств являются, пожалуй, самыми простыми множествами в R^n, n-мерный объём которых больше 0 (и конечен). Почему самыми простыми? Потому, что функции n переменных, участвующие в неравенствах, задающих полупространства, представляют собой функции очень простого вида — линейные комбинации координат.

Рассмотрим три примера множеств из пространства R^n, которые представляются в виде пересечения нескольких полупространств.

Слой в R^n (*полоса в* R^2) определяется как пересечение двух полупространств:

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \geq c_1, \;\; a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n \leq c_2, \;\; \text{где} \;\; c_1 < c_2.$$

Единичный n-мерный куб есть пересечение $2n$ полупространств:

$$x_1 \geq 0, \;\; x_1 \leq 1, \;\; \ldots, \;\; x_n \geq 0, \;\; x_n \leq 1.$$

Симплекс представляет собой пересечение $(n+1)$ полупространства:

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \ldots, \;\; x_n \geq 0, \;\; x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1.$$

Вершинами симплекса служат точки с координатами

$$\begin{gathered}(1,0,0,\ldots,0),\\(0,1,0,\ldots,0),\\\vdots\\(0,0,0,\ldots,1),\\(0,0,0,\ldots,0).\end{gathered}$$

Поскольку *расстояние* между точками $\boldsymbol{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ и $\boldsymbol{b}=(b_1,\ldots,b_n)$ определяется как $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, видим, что расстояния между вершинами симплекса, ни одна из которых не является началом координат, равно $\sqrt{2}$, а расстояние от каждой из других вершин до начала координат равно 1 (см. задачу 8.4).

8.2. Матричное исчисление

Наряду с векторами, матрицы служат важным математическим инструментом, применяемым для работы с многомерным пространством и функциями многих переменных.

Определение. *Матрицей* $\mathbf{A}$ называется прямоугольная таблица с *n* строками и *m* столбцами, ячейки которой заполнены действительными числами. Число, находящееся в *i*-й строке $(i=1,\ldots,n)$ и *j*-м столбце $(j=1,\ldots,m)$ обозначается через a_{ij} (рис. 3). Говорят, что матрица $\mathbf{A}$ имеет размерность *n* x *m*.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm}\end{pmatrix}$$

Рис. 3

Если *n* = *m*, то матрица называется *квадратной*. Вектор с *n* компонентами — частный случай матрицы размерности *n* x 1**.**

Внимание: в матричных формулах под вектором всегда понимается вектор–столбец:

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

Определение. *Транспонированной матрицей* $\mathbf{A}^T$ называется матрица, чьи столбцы (при сохранении их порядка) служат строками матрицы $\mathbf{A}$.

В частности, $\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}$ — это вектор–строка:

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}}=(a_1\,a_2\ldots a_n).$$

Так же, как и векторы, матрицы можно поэлементно умножать на константу. Матрицы одинаковой размерности можно поэлементно складывать. Важнейшей операцией в матричном исчислении является умножение матриц.

Определение. *Произведением* (n x l)–матрицы $\mathbf{A}$ на (l x m)–матрицу $\mathbf{B}$ называется (n x m)–матрица $\mathbf{C}$, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта формула означает, что элемент c_{ij} матрицы $\mathbf{C}$ вычисляется как скалярное произведение i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ и j-го столбца матрицы $\mathbf{B}$ (рис. 4).

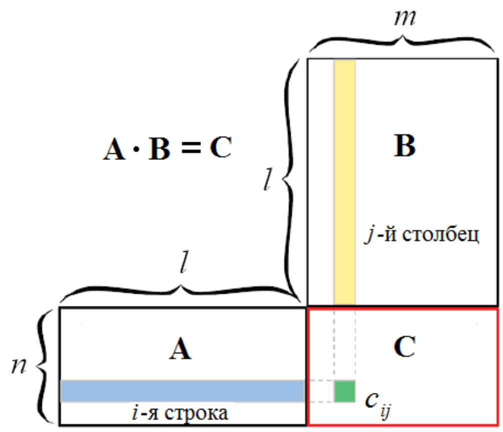

Рис. 4

Упражнение. Перемножьте матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что скалярное произведение $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ записывается в матричной форме как $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{b}$. В частности, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2$.

Свойства умножения матриц

1) Ассоциативность: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

2) Дистрибутивность: $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$;

3) $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$.

Однако в общем случае умножение матриц не является коммутативным: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Упражнение. Придумайте пример некоммутирующих матриц размерности 2 x 2.

8.3. Расстояние от точки до гиперплоскости

Применяя матричные операции, выведем важные формулы, позволяющие рассчитать:
а) длину (со знаком) вектора проекции произвольной точки пространства R^n на заданную ось;
б) расстояние (со знаком) от произвольной точки пространства R^n до заданной гиперплоскости.

Обозначим через $\tilde{\boldsymbol{x}}$ точку, для которой ищется длина вектора проекции $\boldsymbol{p}$ (рис. 5). Представим вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ как сумму вектора проекции $\boldsymbol{p}$ на ось с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ и вектора $\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p}$, ортогонального данной оси: $\tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p} + (\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{p})$.

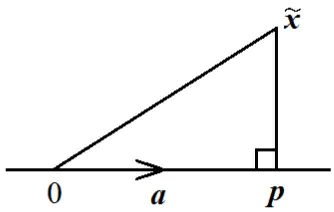

Рис. 5

Легко убедиться, что длина вектора $\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ равна 1. Действительно,

$$|\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}||=\sqrt{a_1^2/|\boldsymbol{a}|^2+\ldots+a_n^2/|\boldsymbol{a}|^2}=\sqrt{a_1^2+\ldots+a_n^2}\Big/|\boldsymbol{a}|=1.$$

Поэтому $\boldsymbol{p}=\tilde{t}\,\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$, где $\tilde{t}$ — искомая длина (со знаком) вектора $\boldsymbol{p}$. Умножая на $\boldsymbol{a}^T$ обе части равенства $\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{p}+(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p})$ и используя дистрибутивность матричного умножения с учётом ортогональности векторов $\boldsymbol{a}$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p}$, получим соотношение

$$\boldsymbol{a}^T\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{p}\ +\ \boldsymbol{a}^T(\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{a}^T\tilde{t}\,\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|\ +\ 0=\tilde{t}\,|\boldsymbol{a}|^2/|\boldsymbol{a}|=\tilde{t}\,|\boldsymbol{a}|.$$

Из него выводим, что

$$\tilde{t}=\frac{\boldsymbol{a}^T\tilde{\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\langle\boldsymbol{a},\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle}{|\boldsymbol{a}|}. \qquad (2)$$

В частности, если $|\boldsymbol{a}|=1$, то $\tilde{t}=\langle\boldsymbol{a},\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle$. Таким образом, длина вектора проекции точки $\tilde{\boldsymbol{x}}$ на ось, заданную вектором длины 1, равна скалярному произведению $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и этого вектора.

Упражнение. Найдите длину вектора проекции точки с координатами $(5, 5)$ на плоскости на ось с направляющим вектором $(3, -4)$.

Теперь вычислим расстояние от точки $\tilde{\boldsymbol{x}}$ до гиперплоскости, заданной уравнением $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\rangle=0$. Перенесём начало координат в точку $\boldsymbol{b}$. В новой системе координат искомое расстояние (со знаком) $\tilde{r}$ совпадает с длиной вектора $\boldsymbol{p}$ — проекции вектора $\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}$ на ось с направляющим вектором $\boldsymbol{a}$ (рис. 6).

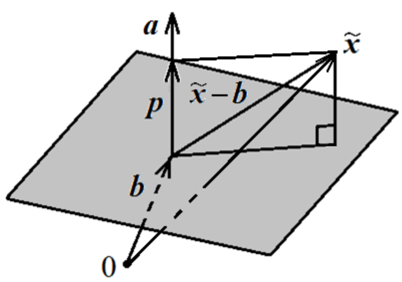

Рис. 6

Поэтому, применяя формулу (2), выводим, что

$$\tilde{r}=\frac{\langle\boldsymbol{a},\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{b}\rangle}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{\langle\boldsymbol{a},\tilde{\boldsymbol{x}}\rangle-c}{|\boldsymbol{a}|},\quad \text{где } c=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle. \qquad (3)$$

Сравнивая числитель дроби из (3) с формулой (1), задающей уравнение гиперплоскости, видим, что для подсчёта числителя дроби надо подставить вектор $\tilde{\boldsymbol{x}}$ в левую часть уравнения гиперплоскости (1).

Упражнение. Найдите расстояние (со знаком) от точки с координатами $(1,\ 2,\ 3)$ до плоскости, заданной уравнением $x_1 + x_2 - x_3 - 3 = 0.$

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Найти координату проекции точки $(1,2,3,4)$ на ось с направляющим вектором $(1,1,1,1).$

8.2. Найти расстояние от точки с координатами $(8,\ 6)$ на плоскости до прямой линии, заданной уравнением $4x_1 + 3x_2 = 15.$

8.3. Лежат ли точки с координатами $(0,0,0,7)$ и $(1,2,3,4)$ по одну или по разные стороны от гиперплоскости $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8?$ Какая из них расположена ближе к гиперплоскости?

8.4. Доказать тождество $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$

8.5*. Доказать, что в пространстве R^n имеются ровно 2 точки, расстояние от которых до всех вершин симплекса, кроме начала координат, равно $\sqrt{2}.$ Найти координаты этих точек.

8.6*. Привести координаты двух ортогональных между собой ненулевых векторов из R^3, которые также ортогональны вектору $(1,1,1).$