Тема 7. Многомерное пространство

7.1. Множества в *n*-мерном пространстве

Множество всевозможных наборов из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *n-мерным пространством* и обозначается R^n. В частности, R^1 — действительная прямая, R^2 — плоскость с координатами x_1 и x_2, R^3 — трёхмерное пространство с координатами x_1, x_2, x_3.

Пространство R^n применяется для описания объектов в терминах сразу нескольких характеристик (свойств объектов). Например, в лингвистике объектами могут быть тексты из некоторого корпуса, характеристиками объекта — длина текста в словах, жанр, возраст автора, пол автора и т. п.

Функцией n переменных, обозначаемой $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется такая зависимость переменной y от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которой каждому набору $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ сопоставляется определённое действительное значение. Как правило, функции нескольких переменных задаются формулами. Например, такими:

$$y = x_1 + x_2, \qquad y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \qquad y = |x_1| + e^{x_2} \sin x_3, \qquad y = x_1^2 + \ldots + x_n^2, \qquad y = \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Множества в пространстве R^n обычно задаются с помощью нескольких неравенств, в которых участвуют функции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le c_1 \text{ (или } \ge c_1), \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le c_2 \text{ (или } \ge c_2), \\ \qquad\qquad \ldots \\ f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le c_k \text{ (или } \ge c_k). \end{cases}$$

Здесь $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — некоторые константы. Во множество входят те и только те наборы из R^n, для которых выполняются <u>все</u> неравенства, задающие множество.

Вопрос. Как устроено множество точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют следующей системе неравенств? (Сначала нарисуйте прямую с уравнением $x_2 = 1 - x_1$.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0. \\ x_2 \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

Упражнение. Постройте и заштрихуйте на плоскости множество точек, определяемое системами неравенств:

а) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 1, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x_1| \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$

Упражнение. Постройте и заштрихуйте на плоскости множество точек, определяемое неравенствами:

а) $|x_1| + |x_2| \le 1;$ б) $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \le 9.$

Вопрос. Как устроено в трёхмерном пространстве множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_1 + x_2 + x_3 \le 1? \tag{2}$$

Определение. Множество в пространстве R^n, заданное неравенствами

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0, \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n \le 1, \tag{3}$$

называется *n-мерным симплексом.*

Какой объём имеет симплекс? Вообще, как определяется объём произвольного множества в n-мерном пространстве?

7.2. Объём n-мерного множества

Сначала обсудим, что такое площадь некоторой фигуры на плоскости. Не углубляясь в математические тонкости, будем определять площадь как предел при измельчении сетки суммы площадей ячеек сетки, середины которых оказались внутри фигуры (рис. 1).

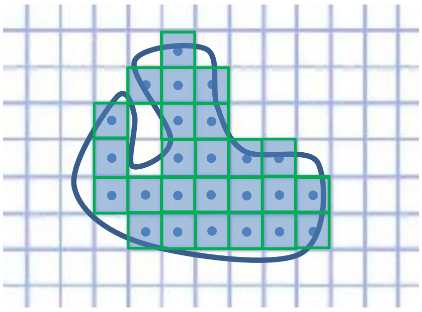

Рис. 1

Пусть фигура задана несколькими неравенствами, в которых участвуют функции от координат x_1 и x_2. Чтобы приближённо вычислить площадь фигуры, прежде всего, найдём достаточно большой квадрат, в котором помещается вся фигура. Затем этот квадрат следует покрыть сеткой с малыми квадратными ячейками. Наконец, с помощью компьютерной программы перебрать все ячейки и подсчитать общую площадь ячеек, для середин которых выполняются все неравенства, определяющие фигуру.

Например, треугольник, определяемый неравенствами (1), содержится внутри квадрата [0, 1] x [0, 1], т. е. квадрата, задаваемого неравенствами $0 \le x_1 \le 1$, $0 \le x_2 \le 1$.

Упражнение. Напишите программу на языке Visual Basic для приближённого вычисления площади треугольника, определяемого неравенствами (1).

Теперь с плоскости R^2 перейдём в пространство R^n. Как определяется понятие объёма для произвольных множеств из n-мерного множества? Очевидно, что n-мерный кубик со сторонами длины h должен иметь объём h^n. По аналогии с двумерным и трёхмерным случаями определим объём произвольного n-мерного множества как предел при измельчении сетки суммы объёмов ячеек сетки (n-мерных кубиков), середины которых оказались внутри множества.

Упражнение. Напишите программу на языке Visual Basic для приближённого вычисления объёма пирамиды, определяемой неравенствами (2). Чему равен объём точно?

7.3. Число π

Как известно из школьного курса математики, числом π называется *отношение длины окружности* $l_{окр}$ *к диаметру окружности* $d_{окр}$:

$$\pi = \frac{l_{окр}}{d_{окр}} = \frac{l_{окр}}{2r}, \text{ где } r \text{ — радиус окружности.} \qquad (4)$$

В школьном курсе математики также сообщается, что $\pi \approx 3{,}14$. Приведём некоторые исторические сведения об этом замечательном числе.

Обозначение греческой буквой π отношения длины окружности к диаметру стало общепринятым после работ Леонарда Эйлера, появившихся в 1737 году. Обозначение происходит от начальной буквы греческого слова περιφέρεια — окружность, периферия.

История числа π шла параллельно с развитием всей математики. В ней можно выделить 3 периода: древний период, в течение которого π изучалось с позиции геометрии; классический период, последовавший за развитием математического анализа в Европе в XVII веке; и эра цифровых компьютеров.

То, что число π немногим более 3, было известно ещё древнеегипетским, вавилонским, древнеиндийским и древнегреческим математикам. Архимед, возможно, первым предложил способ вычисления π. Для этого он вписывал в окружность и описывал около неё правильные многоугольники. Принимая диаметр окружности за единицу, Архимед рассматривал периметр вписанного многоугольника как нижнюю оценку длины окружности, а периметр описанного многоугольника как верхнюю оценку (рис. 2).

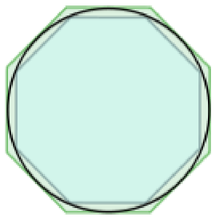

Рис. 2

Рассматривая правильный 96-угольник, Архимед определил 2 верные цифры после запятой у числа π. В 480-х годах китайский математик Цзу Чунчжи вычислил 6 верных цифр: $\pi = 3{,}141592\ldots$. Это значение оставалось самым точным приближением числа π в течение последующих 900 лет.

Дальнейшие крупные достижения в изучении π связаны с развитием математического анализа, в особенности с открытием рядов, позволяющих вычислить π с любой точностью, суммируя подходящее количество членов ряда. В 1400-х годах Мадхава из Индии нашёл первый из таких рядов:

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right).$$

Этот результат известен как ряд Мадхавы — Лейбница, после того как он был заново обнаружен Лейбницем в XVII веке. Однако этот ряд сходится к π очень медленно, что приводит к сложности вычисления многих цифр числа на практике — необходимо сложить около 4000 членов ряда, чтобы улучшить оценку Архимеда.

Отметим, что немного более быстро сходящийся ряд, позволяющий вычислять число π, встречался ранее в задаче 2.5:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots.$$

Проблему нахождения точного значения суммы этого ряда решил Леонард Эйлер в 1735 году.

Дальнейшее продвижение происходило за счёт открытия разных методов ускорения сходимости рядов. Наилучший результат к концу XIX века был получен англичанином Вильямом Шенксом, у которого ушло 15 лет для того, чтобы вычислить 707 цифр, хотя из-за ошибки только первые 527 были верными. Ошибку Шенкса обнаружил один из первых компьютеров в 1948 году; он же за несколько часов подсчитал 808 знаков.

Эпоха цифровой техники в XX веке привела к увеличению скорости появления вычислительных рекордов. Джон фон Нейман и другие использовали в 1949 году компьютер для вычисления 2037 цифр числа π, которое заняло 70 часов. В 2011 году Александр Йи и Сигэру Кондо подсчитали 10^{13} цифр числа π.

Голландский математик Брауэр в первой половине XX века привёл в качестве примера бессмысленной задачи поиск в десятичном разложении числа π последовательности 0123456789 — по его мнению, нужная для этого точность никогда не будет достигнута. В конце XX века эта последовательность была обнаружена, она начинается с 17 387 594 880-го знака после запятой.

Иррациональность числа π была впервые доказана Иоганном Ламбертом в 1761 году. Ниже в дополнении приведено удивительно короткое и простое доказательство из статьи Li Zhou, Lubomir Markov «Recurrent Proofs of the Irrationality of Certain Trigonometric Values» (2009), не использующее ничего сложнее формулы интегрирования по частям. Фердинанд Линдеман в 1882 году установил, что π — *трансцендентное число*, т. е. оно не может быть корнем многочлена с рациональными коэффициентами. Доказательство трансцендентности π положило конец спору о квадратуре круга, длившемуся более 2,5 тысяч лет.

7.4. Площадь круга и объём шара

Сначала выведем формулу для площади круга. Напомним нестрогое доказательство из школьного учебника. Впишем в круг правильный n-угольник. Площадь правильного многоугольника равна половине периметра, умноженного на высоту h (рис. 3).

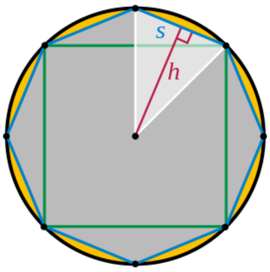

Рис. 3

При увеличении числа сторон многоугольник стремится к окружности, а высота h стремится к радиусу. Это даёт основание считать, что площадь круга равна произведению половины длины окружности на радиус. Из формулы (4) выводим, что

$$S_{круга} = \frac{l_{окр}}{2} \cdot r = \frac{2\pi r}{2} \cdot r = \pi r^2. \qquad (5)$$

В задаче 7.2 предлагается доказать этот результат строго.

Теперь приведём доказательство Архимеда[1] для формулы объёма шара: $V_{шара} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Будем опираться на две формулы:

1) объём цилиндра радиуса r и высоты h равен $\pi r^2 h$;
2) объём конуса с радиусом основания r и высотой h равен $\pi r^2 h/3$.

Последнюю формулу также нашёл Архимед.

Вспомним детские игрушки, называемые пирамидками, состоящие из подставки с вертикальной палочкой и набора колечек разного размера. Надо нанизать эти колечки на палочку так, чтобы размеры колечек увеличивались по мере приближения к подставке. Тогда получится конструкция, похожая на конус.

Доказательство Архимеда легко понять с помощью подобных игрушек. Только надо сделать не одну — коническую, а три разных: цилиндрическую, у которой тоненькие колечки будут иметь радиус r, и если их собрать вместе, то они образуют цилиндр с круговым основанием радиуса r; коническую из колечек разных радиусов, из которых можно собрать конус с радиусом основания r; и полушаровую, собрав из колечек полушар радиуса r (рис. 4). Теперь возьмём аптекарские весы и разместим на них игрушки так, как изображено на рис. 4.

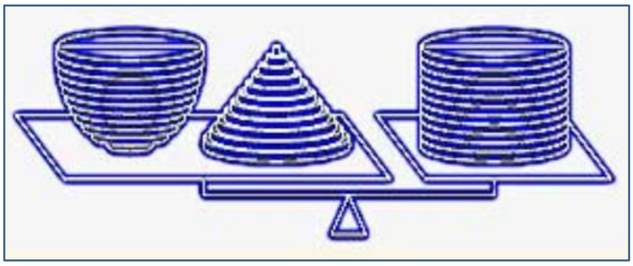

Рис. 4

Пусть высоты колечек одинаковы и равны d, где d — малое число. Подсчитаем, каков радиус колечек, находящихся на одной и той же высоте x. У цилиндрического колечка этот радиус равен r независимо от x; у конического колечка радиус равен $r-x$; наконец, у полушарового колечка по теореме Пифагора радиус равен $\sqrt{r^2-(r-x)^2}$ (рис. 5).

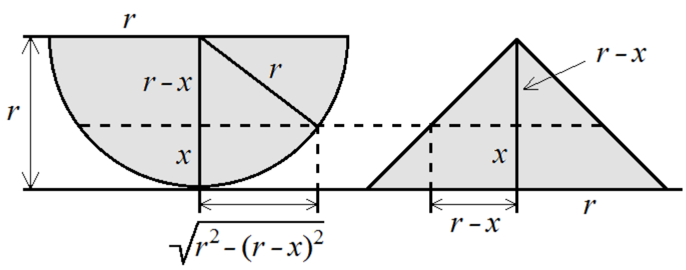

Рис. 5

Объёмы колечек, соответственно, равны $\pi r^2 d$, $\pi(r-x)^2 d$ и $\pi(r^2-(r-x)^2)d$. Заметим, что объём первого колечка в точности равен сумме объёмов второго и третьего колечка, и это верно для любой высоты x. Поэтому суммарный объём на каждой из чаш весов также будет одинаковым.

[1] Архимед гордился найденной им формулой, и в память об этом потомки изобразили шар и цилиндр на его могильном камне.

Но если d мало, то коническая игрушка будет почти неотличима от конуса, полушаровая — от полушара, цилиндрическая — всегда цилиндр. В пределе получаем, что объём полушара равен разности объёмов цилиндра и конуса. Отсюда, учитывая, что высота $h = r$, выводим искомую формулу:

$$V_{шара} = 2 \cdot \left(\pi r^3 - \pi r^3/3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3. \tag{6}$$

Теперь докажем формулу (6), используя современные математические понятия. Первообразной для функции $f(x) = r^2 - (r-x)^2$ служит функция $F(x) = r^2 x + (r-x)^3/3 + c$. Применяя формулу Ньютона — Лейбница, получаем:

$$V_{шара} = 2\int_0^r \pi(r^2 - (r-x)^2)\, dx = 2\pi(F(r) - F(0)) = 2\pi(r^3 - r^3/3) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

7.5. Объём *n*-мерного шара

В трёхмерном пространстве шар радиуса r с центром в начале координат задаётся неравенством

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le r^2.$$

В этот шар попадают все точки пространства, находящиеся от начала координат на расстоянии не больше r.

Заметим, что шар радиуса 1 содержится в кубе, заданном неравенствами

$$-1 \le x_1 \le 1, \quad -1 \le x_2 \le 1, \quad -1 \le x_3 \le 1.$$

Определение. Множество в пространстве R^n, заданное неравенством $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \le r^2$, называется *n-мерным шаром радиуса* r.

Поскольку из неравенства $|x_i| > 1$ вытекает неравенство $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \ge x_i^2 > 1$, то *n*-мерный шар радиуса 1 содержится в *n*-мерном кубе, заданном неравенствами

$$-1 \le x_1 \le 1, \quad -1 \le x_2 \le 1, \; \ldots, \; -1 \le x_n \le 1.$$

Обозначим через p_n отношение объёма *n*-мерного шара радиуса 1 к объёму 2^n содержащего этот шар *n*-мерного куба. В частности, имеем:

$$p_2 = \pi \cdot 1^2 / 2^2 = \pi / 4 \approx 0{,}785;$$
$$p_3 = (4/3) \cdot \pi \cdot 1^3 / 2^3 = \pi / 6 \approx 0{,}524.$$

Известны формулы[2] для p_n в случае произвольного n:

$$p_n = \begin{cases} (\pi/2)^i / (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot n), & \text{если } n = 2i; \\ (\pi/2)^i / (3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot n), & \text{если } n = 2i+1. \end{cases} \tag{7}$$

---

[2] Вывод формул (7) содержится в книге Лагутин М. Б. «Наглядная математическая статистика», с. 35-36.

Согласно первой из формул (7) имеем $p_{2i} = \pi^i / i! / 2^{2i}$. В частности,

$$p_4 = \pi^2 / 2! / 2^4 = \pi^2 / 32 \approx 0{,}308;$$
$$p_{10} = \pi^5 / 5! / 2^{10} \approx 2{,}49 \cdot 10^{-3} \approx 1/400;$$
$$p_{20} = \pi^{10} / 10! / 2^{20} \approx 2{,}46 \cdot 10^{-8}.$$

Ну, а 30-мерный шар радиуса 1 — множество практически нулевого объёма $\pi^{15}/15! \approx 2{,}2 \cdot 10^{-5}$!

Дополнение. Иррациональность числа π

Доказательство. Допустим, что $\pi = a/b$, где a и b — натуральные числа. Рассмотрим

$$f_n(x) = \frac{x^n (\pi - x)^n}{n!}, \qquad I_n = \int_0^\pi f_n(x) \sin x \, dx,$$

где $n = 1, 2, \ldots$. Тогда на отрезке $[0, \pi]$

$$0 \le b^n f_n(x) \le b^n \frac{\pi^n \pi^n}{n!} = \frac{(a\pi)^n}{n!} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

так как факториал $n!$ растёт быстрее показательной функции $(a\pi)^n$. Отсюда, поскольку $0 \le \sin x \le 1$ для любого x из отрезка $[0, \pi]$, получаем, что $b^n I_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Нетрудно проверить, что $I_0 = 2$, и интегрированием по частям установить, что $I_1 = 4$. Также интегрированием по частям для $n \ge 2$ выводится соотношение

$$I_n = -\int_0^\pi f_n''(x) \sin x \, dx = (4n - 2) I_{n-1} - \pi^2 I_{n-2}.$$

Из него по индукции заключаем, что I_n является многочленом с целыми коэффициентами относительно π степени не выше n. Отсюда с учетом предположения $\pi = a/b$ следует, что $b^n I_n$ — целое число при любом n, что противоречит сходимости $b^n I_n \to 0$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Написать программу на языке Visual Basic для приближённого вычисления объёма четырёхмерного симплекса, определяемого неравенствами (3) при $n = 4$.
(*Указание*. Используйте сетку с ячейками размера $h = 0{,}01$.)

7.2. а) Убедиться, что для стороны s правильного вписанного n-угольника и высоты h (см. рис. 3) справедливы формулы:

$$s = 2r \sin\frac{\pi}{n}, \quad h = r \cos\frac{\pi}{n}.$$

б) Применяя разложения синуса и косинуса по формуле Тейлора (см. решение задачи 5.2), строго доказать формулу (5) для площади круга.

7.3. Вычислить приближённо объём четырёхмерного шара радиуса 1 с помощью программы на языке Visual Basic. (*Указание*. Используйте сетку с ячейками размера h = 0,02.)

7.4. Вычислить объём тела, образованного точками в трёхмерном пространстве, координаты которых удовлетворяют неравенствам:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1.$$

7.5. Выяснить, имеются ли точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют системе

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 16, \\ (x-9)^2 + (y-8)^2 \leq 36{,}000001. \end{cases}$$