Тема 5. Минимум и максимум

В мире не происходит ничего, в чём бы не был виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.

Л. Эйлер

5.1. Производные высших порядков и формула Тейлора

Функция, получаемая при вычислении производной от производной $f'(x)$, называется *производной второго порядка* и обозначается через $f''(x)$. Например, для функции $f(x)=x^2$ имеем формулы $f'(x)=2x$ и $f''(x)=2$.

В частности, если исходной функцией служит путь $s(t)$, то $s''(t)=v'(t)=a(t)$ — *ускорение*. Ускорение является одним из базовых понятий физики: оно участвует в формулировке 2-го закона Ньютона $F=ma$ (здесь F — сила, m — масса, a — ускорение).

Пример. *Торможение автомобиля.* При нажатии на педаль тормоза на колёса автомобиля начинает действовать сила трения скольжения по асфальту. Предполагая, что вызванное этой силой отрицательное ускорение постоянно, получаем для скорости автомобиля формулу

$$v(t)=v_0-at,$$

где v_0 — скорость автомобиля в начале торможения. Согласно этой зависимости скорость снизится с v_0 до нуля за время $t_0=v_0/a$. При этом путь, который тормозящий автомобиль успеет проехать за время $t\le t_0$, выражается формулой

$$s(t) = v_0t - \frac{1}{2}at^2.$$

Действительно, дифференцируя функцию $s(t)$, получим соотношение $s'(t)=v_0-at=v(t)$.

Подставляя в формулу для $s(t)$ время до остановки $t_0=v_0/a$, вычислим тормозной путь:

$$s(t_0) = v_0t_0 - \frac{1}{2}at_0^2 = v_0\cdot(v_0/a) - \frac{1}{2}a\cdot(v_0/a)^2 = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Таким образом, тормозной путь $s(t_0)$ прямо пропорционален квадрату скорости v_0. Например, известно, что при скорости $v_0=50$ км/ч тормозной путь примерно равен 30 м. Если же v_0 увеличить в 2 раза (до 100 км/ч), то тормозной путь возрастёт в 2^2 = 4 раза и составит 120 м.

Производные высших порядков. Дифференцируя функцию $f''(x)$, получаем *производную третьего порядка* $f'''(x)$. Вообще, продифференцировав n раз функцию $f(x)$, получим *производную n-го порядка*, обозначаемую через $f^{(n)}(x)$.

Например, для экспоненты $f(x)=e^x$ имеем $f^{(n)}(x)=e^x$.

Упражнение. Найдите $f^{(4)}(x)$ для функции:

а) $f(x)=\sin x$; б) $f(x)=\cos x$.

Упражнение. Найдите для функции $f(x)=x^n$:

а) $f^{(n)}(x)$; б) $f^{(n+1)}(x)$.

Обобщением теоремы Лагранжа из темы 4 служит важнейшая в математическом анализе ***Формула Тейлора***. Для произвольного x_0 и любой $(n+1)$ раз дифференцируемой функции $f(x)$ найдётся такая точка $\xi,$ принадлежащая интервалу $(x_0,\, x)$, что верно представление

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (1)$$

Формула Тейлора позволяет аппроксимировать гладкую функцию $f(x)$ с помощью многочлена n-й степени $p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$ при этом последнее слагаемое в формуле (1) рассматривается как остаток, которым можно пренебречь.

В частности, при $n=1$ получаем приближение функции $f(x)$ линейной функцией

$$y=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0),$$

которая совпадает с касательной к функции $f(x)$ в точке x_0.

При $n=2$ получаем приближение функции $f(x)$ параболой

$$y=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \quad \text{и т. д.}$$

Пример. ***Разложение экспоненты.*** Для $f(x)=e^x$ имеем $f^{(n)}(x)=e^x$. Поэтому $f^{(n)}(0)=e^0=1.$ Взяв формуле Тейлора $x_0=0,$ получаем для экспоненты следующее разложение:

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\ldots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (2)$$

Из этой формулы имеем ряд аппроксимаций экспоненты с помощью многочленов:

$$y=1+x, \quad y=1+x+\frac{x^2}{2!}, \quad y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}, \;\ldots .$$

Формула Тейлора используется для получения очень многих важных результатов математического анализа. Для примера докажем второе определение экспоненты из темы 3:

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right).$$

Сравнивая с формулой (2), видим, что достаточно убедиться, что $\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}|\,x\,|^{n+1}\to 0$ при $n\to\infty.$ Так как $e^{\xi}<e^{|x|}=const$ для фиксированного $x,$ надо проверить, что для любого x факториал $n!$ растёт быстрее последовательности $|\,x\,|^n$. Интуитивно это понятно. Докажем строго. Возьмём целое число $N>|x|$ и положим $0\le q=|x|\,/\,N<1$. Тогда для всех $n\ge N$ выполняется неравенство

$$0\le\frac{|x|^n}{n!}=\frac{|x|^N|x|^{n-N}}{N!\,(N+1)\cdot\ldots\cdot n}=\frac{|x|^N}{N!}\cdot\frac{|x|}{(N+1)}\cdot\,\ldots\,\cdot\frac{|x|}{n}\;\le\;\frac{|x|^N}{N!}\,q^{n-N}=\frac{|x|^N}{N!}\,q^{-N}q^n=const\cdot q^n.$$

Для завершения доказательства осталось применить принцип «двух полицейских» из темы 2.

5.2. Иррациональность числа e

С помощью формулы (2) несложно доказать, что число e является *иррациональным*, т. е. его нельзя представить в виде обыкновенной дроби $\dfrac{m}{n}$ с целыми m и n.

Доказательство. Сначала установим справедливость неравенства $2 < e < 3$. Оно вытекает из формулы (3) темы 3 и следующего сравнения с геометрической прогрессией:

$$2 = 1+1 < e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots = 1+\frac{1}{1-1/2} = 3.$$

Предположим, что $e = \dfrac{m}{n}$. Так как $2 < e < 3$, то число e не является целым числом, и можно считать, что знаменатель дроби $n \geq 2$. Теперь используем формулу (2), положив в ней $x = 1$:

$$e = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}, \qquad (3)$$

где $0 < \xi < 1$. Умножив на $n!$ обе части формулы (3), получим равенство

$$n!e - n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right) = \frac{e^{\xi}}{n+1}. \qquad (4)$$

Заметим, что $n!e = n!\dfrac{m}{n} = (n-1)!\,m$ — целое число, $\dfrac{n!}{i!} = (i+1)(i+2)\cdot\ldots\cdot n$ — тоже целые числа при всех $i \leq n$. Поэтому в левой части формулы (4) стоит целое число.

В свою очередь, для правой части формулы (4) ввиду возрастания экспоненты справедливо неравенство

$$\frac{1}{n+1} = \frac{e^0}{n+1} < \frac{e^{\xi}}{n+1} < \frac{e^1}{n+1} < \frac{3}{n+1}.$$

Поскольку $n \geq 2$, выводим отсюда неравенство $0 < \dfrac{e^{\xi}}{n+1} < 1$. Поэтому $\dfrac{e^{\xi}}{n+1}$ не может быть целым числом. Получено противоречие, вызванное предположением о рациональности числа e.

5.3. Необходимое условие минимума или максимума

Минимумом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (обозн. $\min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$), называется наименьшее значение, принимаемое функцией на этом отрезке. Минимум может достигаться в нескольких точках (рис. 1).

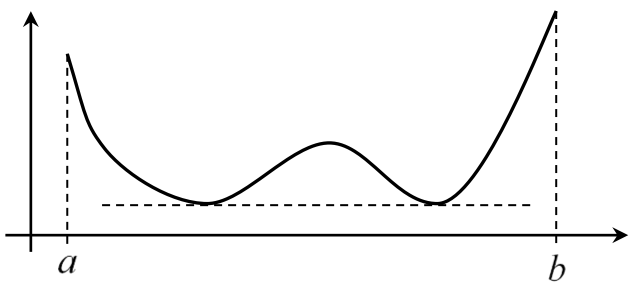

Рис. 1

Максимум функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, обозначаемый через $\max\limits_{a \le x \le b} f(x)$, определяется как наибольшее значение функции, принимаемое на отрезке $[a, b]$.

Минимум и максимум могут достигаться как внутри отрезка, так и на его концах. Например, квадратичная функция $f(x) = x^2$ на отрезке $[-1, 1]$ имеет минимум 0 при $x = 0$, а её максимум, равный 1, достигается в двух концевых точках отрезка: при $x = -1$ и $x = 1$.

Утверждение 1 (*необходимое условие минимума или максимума*). Минимум или максимум дифференцируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ достигаются либо на концах отрезка, либо в таких точках интервала (a, b), в которых $f'(x) = 0$. В этих точках касательная к графику функции становится строго горизонтальной (рис. 2).

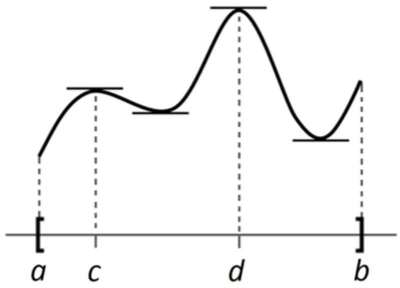

Рис. 2

Значения аргумента функции $f'(x)$, при которых она равна 0, называются *корнями уравнения* $f'(x) = 0$. Например, корнями уравнения $(x-2)(x-5) = 0$ служат числа 2 и 5.

***Идея доказательства утверждения* 1.** Пусть в некоторой внутренней точке x_0 производная $f'(x_0) > 0$. Тогда касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0 имеет положительный угловой коэффициент. График функции $f(x)$ в малой окрестности точки x_0 близок к своей касательной. Поэтому функция в этой окрестности тоже возрастает. Значит, чуть правее точки x_0 функция $f(x)$ принимает значения больше $f(x_0)$, а чуть левее — меньше $f(x_0)$. Поэтому x_0 не является ни точкой минимума, ни точкой максимума. (Случай $f'(x_0) < 0$ рассматривается аналогично.)

Строгое доказательство утверждения 1, опирающееся на определение и свойства предела, довольно громоздко. Его можно найти в учебниках по математическому анализу.

Методика поиска минимума (максимума). Ввиду утверждения 1 для поиска минимума (максимума) дифференцируемой функции необходимо уметь находить корни уравнения $f'(x) = 0$. После нахождения корней следует сравнить значения функции $f(x)$ во всех корнях и на концах отрезка и выбрать среди них наименьшее (наибольшее) значение.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = xe^{-x}$ на отрезке $[0, 2]$. Применяя формулы дифференцирования из темы 4, находим производную:

$$f'(x) = (xe^{-x})' = x'e^{-x} + x(e^{-x})' = 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

Поскольку $e^{-x} > 0$, единственным корнем уравнения $f'(x) = 0$ является $x_0 = 1$. Значения функции $f(x)$ в точке x_0 и на концах отрезка $[0, 2]$ равны e^{-1}, 0, $2e^{-2}$ соответственно. Так как $f(x) = xe^{-x} \ge 0$ на отрезке $[0, 2]$, то $\min\limits_{0 \le x \le 2} f(x) = 0$.

Чтобы найти максимум функции, осталось сравнить между собой числа e^{-1} и $2e^{-2}$. Выполним это сравнение без использования приближённого значения для иррационального числа e^{-1}. Учитывая, что $e>2$, запишем:

$$e^{-1}=\frac{1}{e}=\frac{e}{e^2}>\frac{2}{e^2}=2e^{-2}.$$

Следовательно, $\max\limits_{0\le x\le 2} f(x)=e^{-1}$. График функции $f(x)=xe^{-x}$ изображён на рис. 3.

Рис. 3

Упражнение. Найдите минимум и максимум функции $f(x)=2x^3-3x^2$ на отрезке $[0,\,2]$.

5.4. Локальные минимумы и максимумы

Одним из основных принципов математического анализа является *принцип локализации*. Он заключается в изучении тех особенностей функции, которые можно установить без знания поведения функции на всём отрезке $[a,\,b]$: достаточно знать лишь то, как ведёт себя функция в сколь угодно малой окрестности некоторой точки, т. е. локально. К таким характеристикам относятся понятия локального минимума и локального максимума.

Определение. Внутренняя точка x_0 отрезка $[a,\,b]$ называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$, если найдётся такое число $\varepsilon>0$, что $f(x)\ge f(x_0)$ для всех x из $[x_0-\varepsilon,\; x_0+\varepsilon]$. Иначе говоря, локальный минимум является минимумом в некоторой окрестности точки x_0.

Аналогично определяется точка локального максимума. Минимум (максимум) на всём отрезке $[a,\,b]$, в отличие от локального минимума (максимума), называется *глобальным*.

Глобальный минимум (максимум) единственен (хотя он может достигаться в нескольких точках). Локальных минимумов (максимумов) может быть несколько и даже бесконечно много (см. рис. 5 из темы 1).

Например, на рис. 2 точки *c* и *d* являются точками локальных максимумов. Глобальный максимум достигается в точке *d*. Глобальный минимум достигается в точке *a* на конце отрезка.

Чтобы найти локальные минимумы и максимумы, надо найти корни уравнения $f'(x)=0$. Однако эти корни не обязательно служат точками локального минимума или максимума. Например, функция $f(x)=x^3$ с производной $f'(x)=3x^2$ имеет в точке $x_0=0$ *перегиб* (рис. 4).

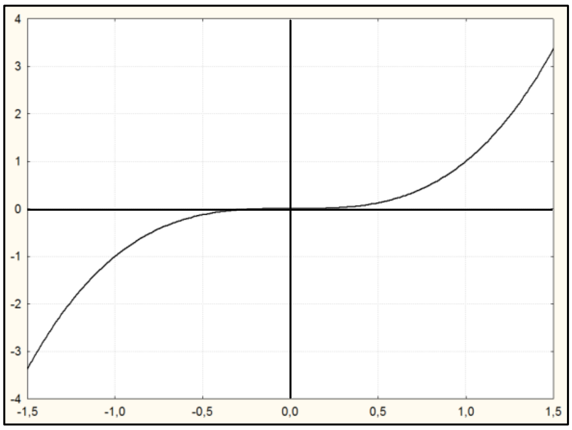

Рис. 4

Как выяснить, является ли корень уравнения $f'(x)=0$ точкой локального минимума, максимума или перегиба?

Утверждение 2 (*достаточные условия минимума и максимума*). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на отрезке $[a, b]$ и $f'(x_0)=0$ во внутренней точке x_0. Тогда
если $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка локального минимума;
если $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка локального максимума.

В случае $f''(x_0)=0$ ничего утверждать нельзя. Для выяснения, является ли корень x_0 точкой локального минимума, локального максимума или точкой перегиба, нужно применить приведённое ниже утверждение 3.

Например, функция $f(x)=x^2$ с производными $f'(x)=2x$ и $f''(x)=2$ имеет в точке $x_0=0$ локальный минимум, который на самом деле является глобальным на всей числовой прямой.

***Идея доказательства утверждения* 2.** Объясним, почему приведённое утверждение верно. Действительно, если $f''(x_0)>0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 производная $f'(x)$ возрастает. Так как $f'(x_0)=0$, то $f'(x)<0$ слева от x_0 и $f'(x)>0$ справа от x_0. Таким образом, $f(x)$ убывает слева от x_0 и $f(x)$ возрастает справа от x_0. Поэтому в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум.

Данное рассуждение можно сделать строгим, но из-за громоздкости выкладок не станем этим заниматься.

Что происходит в случае, когда $f''(x_0)=0$? Примеры функций $y=x^3$, $y=x^4$, $y=-x^4$ показывают, что могут быть и перегиб, и минимум, и максимум. Как выяснить, какой именно характер имеет особенность? Обычно ответ удаётся получить с помощью следующего утверждения, основанного на формуле Тейлора.

Утверждение 3 (*обобщённые достаточные условия минимума и максимума*). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $(n+1)$ раз на отрезке $[a, b]$. Предположим, что во внутренней точке x_0

$$f'(x_0)=0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0)=0, f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда

а) если n — чётное число и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 — точка локального минимума;

б) если n — чётное число и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 — точка локального максимума;

в) если $n>1$ — нечётное число, то x_0 — точка перегиба.

***Идея доказательства утверждения* 3.** Пусть x — малое число. Согласно формуле Тейлора (1)

$$f(x_0+x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Поскольку x мало, то третье слагаемое пренебрежимо мало по сравнению со вторым. Поэтому

$$f(x_0+x) \approx \tilde{f}(x_0+x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n.$$

Если n — чётное число и $f^{(n)}(x_0)>0,$ то функция $\tilde{f}(x_0+x)$ имеет минимум при $x=0.$ Если n — чётное число и $f^{(n)}(x_0)<0,$ то функция $\tilde{f}(x_0+x)$ имеет максимум при $x=0.$ Если $n > 1$ — нечётное число, то функция $\tilde{f}(x_0+x)$ имеет перегиб при $x=0.$

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Используя разложение экспоненты по формуле Тейлора, найти
$\lim\limits_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1).$

5.2. Найти по формуле Тейлора разложения на отрезке $[0,\ x]$ для функций:

а) $f(x)=\sin x;$

б) $f(x)=\cos x.$

5.3. Найти производные $f^{(n)}(x)$ для функции $f(x)=1/x.$

5.4. а) Найти по формуле Тейлора разложение на отрезке $[0,\ x]$ для функции $f(x)=\ln(1+x).$

б) Найти без использования вычислительных средств сумму $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.$

5.5. Найти, используя производные, все локальные минимумы и локальные максимумы функции $f(x)=x^4-2x^2$ на отрезке $[-2,\ 2].$ Построить её график с помощью Excel.

5.6. Найти глобальный минимум и глобальный максимум функции $y=x^2e^{-x}$ на отрезке $[-1,\ 4]$ без использования приближённого значения для числа $e.$ Затем (для проверки) постройте график этой функции с помощью Excel.