Тема 3. Экспонента и логарифм

3.1. Непрерывная ставка сложных процентов

Капитализация банковского вклада. Представим, что вкладчик имеет возможность поместить определённую сумму (скажем, 1 миллион рублей) в банк по ставке 100% годовых. (*Эх, где бы найти такой банк*?) Предположим, что условия размещения вклада допускают закрытие вклада в любой момент без потери процентов.

Вкладчик решил снять деньги вместе с процентами через полгода, а затем снятую сумму положить ещё на полгода на тех же условиях. Сколько тогда он будет иметь в конце года для вклада в 1 миллион рублей? Давайте подсчитаем:

через полгода — 1 млн · (1 + 0,5) = 1,5 млн;
через год — 1,5 млн · (1 + 0,5) = 1 млн · $(1 + 0{,}5)^2$ = 2,25 млн.

А сколько он получит, если станет снимать деньги с процентами каждые 4 месяца? Вычисляем:

через 4 месяца — 1 млн · (1 + 1/3);
через 8 месяцев — 1 млн · $(1 + 1/3)^2$;
через год — 1 млн · $(1 + 1/3)^3$ ≈ 2,37 млн.

А если снимать деньги каждый месяц? Аналогично находим: 1 млн · $(1 + 1/12)^{12}$ ≈ 2,613 млн. Такой доход называется *доходом с ежемесячной капитализацией процентов.*

А если снимать деньги каждый день, час, минуту, …?[1] Из чисто математического интереса находим, что итоговая сумма в конце года ограничена величиной

$$1 \text{ млн} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 \text{ млн} \cdot e \approx 2{,}718282 \text{ млн.}$$

Определение. Число e — это предел числовой последовательности $y_n = (1 + 1/n)^n$. Его можно интерпретировать как *максимальный коэффициент увеличения вклада для ставки* 100%.

В свою очередь, для годовой ставки $(x \cdot 100)\%$ аналогично выводим, что максимальный коэффициент увеличения вклада равен

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Этот предел, как функция аргумента x, обозначается через $\exp(x)$ (или кратко e^x) и называется *экспонентой*. Итак, по определению

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n. \qquad (1)$$

В частности, для ставки 10% имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + 0{,}1/n)^n = e^{0{,}1} \approx 1{,}1052.$ Реальная ежемесячная капитализация дает почти такой же коэффициент увеличения вклада: $(1 + 0{,}1/12)^{12}$ ≈ 1,1047, т. е. годовой *процент с ежемесячной капитализацией* равен 10,47%.

Упражнение. Найдите $e^{0{,}05}$ и готовой процент с ежемесячной капитализацией для ставки 5%. (*Указание*. Используйте встроенную в Excel функцию EXP.)

[1] Реальные банки не позволяют капитализировать проценты чаще, чем один раз в месяц.

Варьируя значение переменной x в формуле (1), получим возрастающую функцию $y = e^x$, график которой изображён рис. 1.

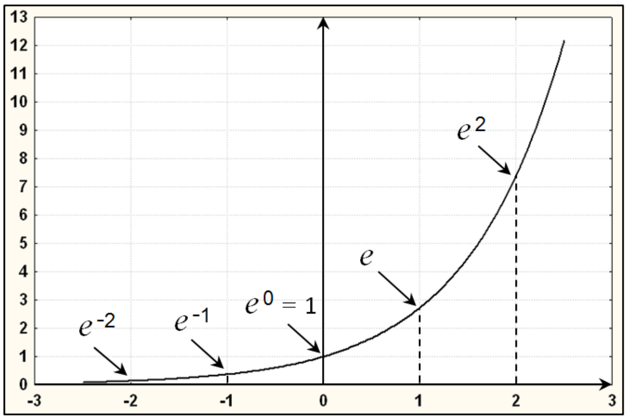

Рис. 1

При увеличении x экспонента очень быстро растёт e^2 ≈ 7,389; e^5 ≈ 148,4; e^7 ≈ 1096,6.

Основное свойство экспоненты

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}. \qquad (2)$$

Поскольку $e^0 = 1$, то из формулы (2) для любого x следует равенство $e^{-x} \cdot e^x = e^0 = 1$. Таким образом, $e^{-x} = 1/e^x$. Применяя последнюю формулу, видим, что последовательность $y_n = e^{-n}$ при $n \to \infty$ сходится к нулю, причём очень быстро: уже e^{-7} < 0,001.

Альтернативным определением экспоненты является следующий предел:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right), \qquad (3)$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ — *факториал* от натурального числа n.

Упражнение. Вычислите приближённо значение $e^{0,05}$ на основе формулы (3) для $n = 10$. (*Указание*. Используйте функцию ФАКТР [FACT] из Excel.)

3.2. Натуральный логарифм

По определению *натуральным логарифмом* называется функция обратная к экспоненте. Она обозначается как $\ln(x)$ (от латинского ***l**ogarithmus **n**aturalis*). Ради краткости аргумент логарифма обычно не заключают в скобки и пишут $\ln x$. Таким образом,

$$\ln(\exp(x)) = \ln e^x = x.$$

График натурального логарифма изображён на рис. 2. Он получается симметричным отражением графика экспоненты $y = e^x$ относительно прямой $y = x$. Логарифм определён только при $x > 0$. Функция $y = \ln x$ неограниченно возрастает при увеличении аргумента x. Однако растёт она очень медленно: $\ln 1 = 0$; $\ln 10 \approx 2{,}303$; $\ln 100 \approx 4{,}605$; $\ln 1\,000\,000 \approx 13{,}82$. Отметим также, что если аргумент x приближается к нулю, то функция $\ln x \to -\infty$ (см. рис. 2).

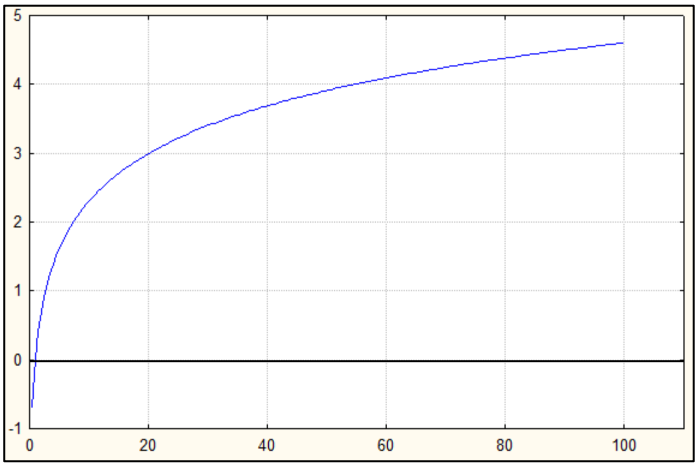

Рис. 2

Логарифм обладает следующим свойством: для любых действительных чисел $a > 0$ и $b > 0$ верно равенство

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b. \quad (4)$$

Доказательство. Так как экспонента является обратной функцией для натурального логарифма, то $\exp(\ln(x)) = e^{\ln x} = x$. Применяя основное свойство экспоненты (2), получаем:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(e^{\ln a} \cdot e^{\ln b}) = \ln(e^{\ln a + \ln b}) = \ln a + \ln b,$$

что и требовалось доказать.

Упражнение. Вычислите приближённо натуральный логарифм числа, записываемого в виде единицы с тысячью нулями. (Натуральный логарифм в Excel называется LN.)

Исторически логарифмы был придуманы для облегчения трудоёмкой процедуры перемножения больших чисел. Например, пусть требуется перемножить числа 123456789 и 987654321. По таблице находим их натуральные логарифмы:

$$\ln 123456789 \approx 18{,}6314, \qquad \ln 987654321 \approx 20{,}7108.$$

Отсюда согласно формуле (4) имеем:

$$\ln(123456789 \cdot 987654321) = \ln 123456789 + \ln 987654321 \approx 18{,}6314 + 20{,}7108 = 39{,}3422.$$

Наконец, находим в таблице число, имеющее натуральный логарифм 39,3422. Это $1{,}2193 \cdot 10^{17}$.

Первые таблицы логарифмов появились в Шотландии в 17 веке. Джон Непер (John Napier) опубликовал в Эдинбурге в 1614 году сочинение под названием «Описание удивительной таблицы логарифмов». Непер писал: «Я всегда старался, насколько позволяли мои силы и способности, освободить людей от трудности и скуки вычислений, докучливость которых обыкновенно отпугивает очень многих от изучения математики».

Используя экспоненту и натуральный логарифм, можно строго определить известную из школьного курса алгебры *показательную функцию* a^x, где a — произвольное положительное действительное число, следующей формулой

$$a^x = e^{x \ln a}. \quad (5)$$

При $a > 1$ график функции $y = a^x$ отличается от графика $y = e^x$ лишь сжатием (растяжением) вдоль горизонтальной оси в $\ln a$ раз.

С натуральным логарифмом связан один замечательный предел. Ранее в разделе 2.3 изучалась числовая последовательность

$$z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Было установлено, что $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$, но не было выяснено, с какой скоростью растёт z_n. Оказывается, последовательность $\{z_n\}$ растёт со скоростью $\ln n$. Точнее говоря,

$$\lim_{n\to\infty}(z_n - \ln n) = \gamma \approx 0{,}577, \tag{6}$$

где γ — *постоянная Эйлера — Маскерони*. Неизвестно, является ли γ рациональным числом, однако доказано, что если γ — обыкновенная дробь, то её знаменатель больше 10^{242080}.

Упражнение. Напишите программу на Visual Basic для приближённого вычисления постоянной Эйлера — Маскерони γ. Возьмите n = 1 000 000.
Предупреждение. В отличие от Excel функция $\ln x$ на языке Visual Basic называется Log(x).

3.3. Графики некоторых функций, содержащих экспоненту

Сначала построим график функции $y = e^{-x}$. Этот график получается симметричным отражением графика экспоненты $y = e^x$ относительно вертикальной координатной оси (рис. 3). При возрастании x функция e^{-x} быстро приближается к 0.

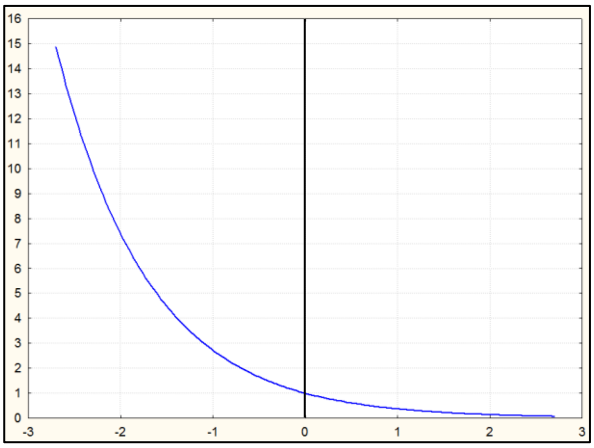

Рис. 3

Упражнение. Постройте без Excel графики функций:

а) $y = 1 - e^{-x}$;

б) $y = e^{-|x|}$;

в) $y = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2}$.

Для построения графика из пункта в) надо при каждом x сложить значения функций e^{-x} и e^{x}, затем разделить сумму на 2 (рис. 4). Именно такую форму (а вовсе не параболу) принимает провисающая корабельная цепь или электрический провод линии высоковольтных передач.

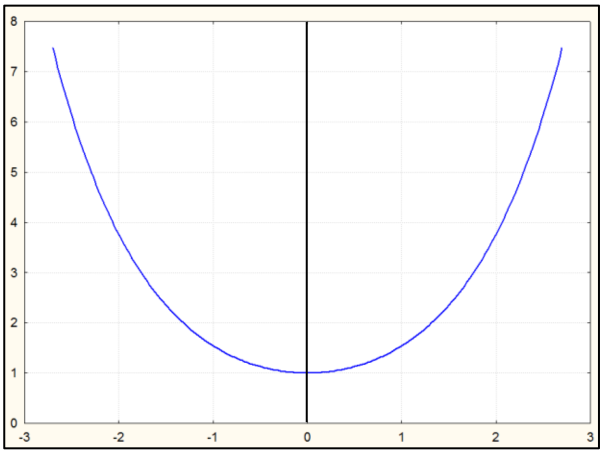

Рис. 4

В заключение построим график *логистической функции*, задаваемой формулой

$$y = \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

Она имеет *S*-образную форму (рис. 5). Из всех кривых такой формы логистическая кривая, пожалуй, задаётся наиболее простой формулой. Если аргумент x возрастает, то логистическая функция приближается к 1. Если аргумент x убывает, то она приближается к 0.

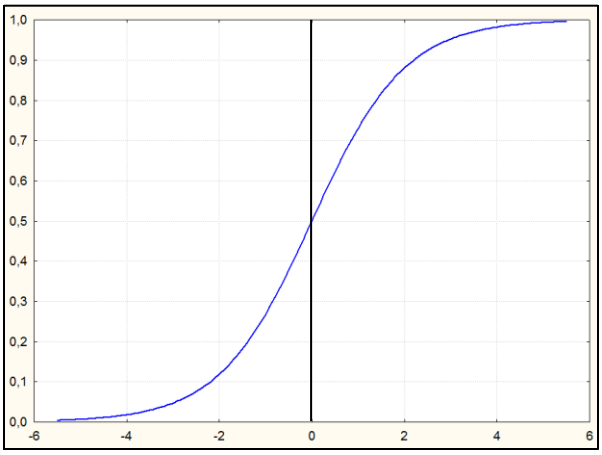

Рис. 5

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Построить с помощью Excel график функции $y = x^3 e^{-x}$ на отрезке [-1, 9] с шагом 0,01. Найти значение аргумента, при котором эта функция принимает наибольшее значение.

3.2. Вывести формулу и построить с шагом 0,001 на (0, 1) график обратной функции к логистической кривой. Как ведёт себя график при приближении аргумента функции к 0 и 1?

3.3*. Пусть k — произвольное натуральное число. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} n^k e^{-n}$ (строго доказать ответ).

(*Указание*. Сначала получите с помощью формулы (3) неравенство $e^n > n^{k+1}/(k+1)!$.)