# Тема 2. Предел последовательности

## 2.1. Определение предела

Одним из фундаментальных понятий математики является *действительное число*. Интуитивно понятно, что такое рациональное число, записываемое в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ — некоторые целые числа.[1] Но что такое, например, число $\pi$, выражающее отношение длины окружности к диаметру? Доказано, что $\pi$ не является рациональным числом. Поэтому в десятичном представлении числа $\pi$ содержится бесконечное число цифр после запятой: $\pi$ = 3,1415926535… .[2] Ограничиваясь первыми $n$ цифрами в этом представлении ($n$ = 1, 2, 3, 4, …), получим ряд приближений $p_n$ к числу $\pi$:

$$p_1 = 3{,}1; \quad p_2 = 3{,}14; \quad p_3 = 3{,}141; \quad p_4 = 3{,}1415; \; \ldots .$$

Чем больше индекс $n$, тем меньше приближение $p_n$ отличается от числа $\pi$. Можно записать это так: $p_n \to \pi$, т. е. $p_n$ стремятся (сходятся) к числу $\pi$. Ниже будет строго определено, что означает сходимость числовой последовательности $\{p_n\}$ к пределу. Произвольные действительные числа можно понимать как пределы приближающих их последовательностей из рациональных чисел.

Сначала рассмотрим два простых примера сходящихся последовательностей:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1/2, \quad a_3 = 1/3, \quad a_4 = 1/4, \; \ldots$$

и

$$b_1 = 1/2, \quad b_2 = 1/4, \quad b_3 = 1/8, \quad b_4 = 1/16, \; \ldots .$$

Формулы для $n$-го члена этих последовательностей имеют вид $a_n = 1/n$ и $b_n = 1/2^n$ соответственно. В обоих случаях с ростом индекса $n$ члены последовательностей убывают и приближаются к 0 при $n \to \infty$.

Как наглядно изобразить произвольную числовую последовательность $\{y_n\}$? Её можно рассматривать как функцию $y(n)$, аргумент $n$ которой принимает всевозможные целые положительные (*натуральные*) значения: $n$ = 1, 2, 3, … . Для нецелых значений аргумента $x$ значения функции $y(x)$ не задаются. Ради общности будем считать, что для нецелых $x$ из отрезка $[n, n+1]$ значения $y(x)$ получаются линейной интерполяцией величин $y_n$ и $y_{n+1}$. Тогда последовательность $\{y_n\}$ можно изобразить графически в виде ломаной линии (рис. 1).

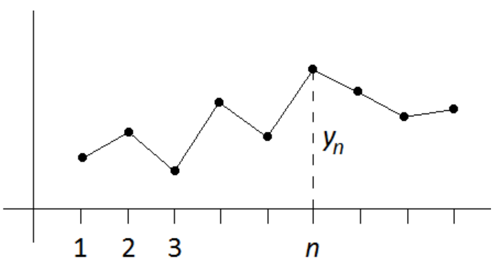


**Рис. 1**

Важнейшую роль в высшей математике играет понятие предела последовательности. Через него определяются такие фундаментальные понятия математического анализа как производная (тема 4) и интеграл (тема 6). Дадим строгое определение сходимости к пределу.

---

[1] Лат. ratio — отношение, дробь.

[2] Более подробно об иррациональности числа $\pi$ и об истории вычисления его значащих цифр говорится в теме 7.

**Определение.** Последовательность $\{y_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к числу $c$, называемому *пределом*, если для любого сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся такой номер $n_\varepsilon$ (т. е. зависящий от $\varepsilon$), что для всех натуральных $n \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $c - \varepsilon \leq y_n \leq c + \varepsilon$.

Наглядно сходимость к пределу $c$ означает, что для сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ график последовательности $\{y_n\}$ находится при всех $x \geq n_\varepsilon$ в полосе с границами $c-\varepsilon$ и $c+\varepsilon$ (рис. 2).

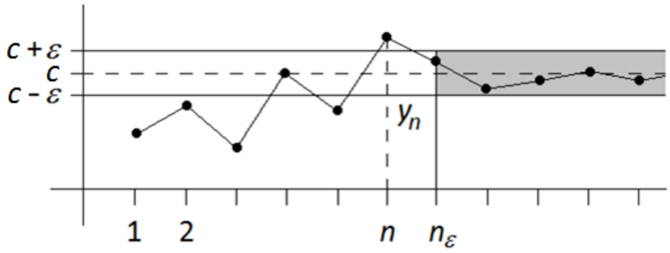


**Рис. 2**

Сходимость последовательности $\{y_n\}$ к пределу $c$ обозначается как

$$y_n \to c \quad \text{или} \quad c = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Здесь lim — это сокращение от латинского слова limitem («предел, граница»).

**Вопрос 1.** Чему равно $n_\varepsilon$ для последовательности $a_n = 1/n$ при $\varepsilon = 0{,}01$?

**Вопрос 2.** Чему равно $n_\varepsilon$ для последовательности $b_n = 1/2^n$ при $\varepsilon = 0{,}1$?

**Вопрос 3.** Верно ли, что последовательность $d_n = (-1)^n$ сходится к 1 при $n \to \infty$?

**Вопрос 4*.** Существует ли число $c$, являющееся пределом последовательности $d_n = (-1)^n$?

## Свойства пределов

Пусть $a_n \to a$ и $b_n \to b$, где $a$ и $b$ — некоторые числа. Тогда:

1) $a_n + b_n \to a + b$;
2) $a_n b_n \to ab$;
3) $a_n / b_n \to a/b$, если $b \neq 0$.

Теперь немного обобщим определение предела, позволив ему быть бесконечным ($c = \infty$).

**Определение.** Говорят, что последовательность $\{y_n\}$ сходится к $\infty$ при $n \to \infty$, если для любого сколь угодно большого числа $M$ найдётся такой номер $n_M$ (т. е. зависящий от $M$), что для всех натуральных чисел $n \geq n_M$ выполняется неравенство $y_n \geq M$.

Аналогично определяется сходимость последовательности к $-\infty$.

***Замечание.*** Если $a$ или $b$ равны $\infty$, то указанные выше свойства пределов, вообще говоря, могут не выполняться. Неопределённости вида $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\infty/\infty$ необходимо исследовать индивидуально. Например, для $a_n = n^2 \to \infty$ и $b_n = n \to \infty$ имеем $a_n / b_n = n \to \infty$.
В свою очередь, для $a_n = n \to \infty$ и $b_n = n^2 \to \infty$ имеем $a_n / b_n = 1/n \to 0$.

**Упражнения.**

а) Вычислите $a_n = \dfrac{1+2/n+100/n^2}{5+3/n}$ для $n$ = 1, 2, … , 1000 в Excel. Догадайтесь, чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

б) Формально найдите $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ из пункта а) с помощью указанных выше свойств предела.

в) Для $b_n = \dfrac{2n^2+7n+100}{3n^2-n+1}$ найдите точное значение $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ с использованием свойств предела.

**Принцип «двух полицейских»**

Пусть $a_n \le b_n \le c_n$ при всех $n$, $a_n \to d$ и $c_n \to d$, где $d$ — число, $\infty$ или $-\infty$. Тогда $b_n \to d$.

**Очевидное утверждение.** Пусть $0 < q < 1$. Тогда предел последовательности $y_n = q^n$ равен 0.

**Упражнение.** Используя принцип «двух полицейских», найдите пределы при $n \to \infty$ последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{(-4)^n}{5^n}$;

б) $y_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

## 2.2. Сумма бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим один важный пример вычисления предела последовательности: установим формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии. *Геометрической прогрессией* называется последовательность 1, $q$, $q^2$, $q^3$, … . Положим

$$s_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}. \tag{1}$$

Сначала выведем простую формулу для суммы $s_n$. Умножим $q$ на $s_n$ и получим равенство

$$qs_n = q + q^2 + \ldots + q^n. \tag{2}$$

Вычитая из правой части формулы (1) правую часть формулы (2) и сокращая $q$, $q^2$, …, $q^{n-1}$, выводим соотношение

$$s_n - qs_n = 1 - q^n.$$

Вынесем в левой части $s_n$ за скобку и получим равенство $s_n(1-q) = 1-q^n$, которое в случае $q \ne 1$ равносильно искомой формуле

$$s_n = \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{3}$$

**Вопрос 5.** Чему равна сумма $s_n$ при $q = 1$?

**Вопрос 6.** Чему равен предел при $n \to \infty$ последовательности $s_n$ для $0 < q < 1$?

**Вопрос 7.** Для каких действительных чисел $q$ последовательность $s_n$ сходится к конечному пределу? Чему он равен?

Согласно ответу на вопрос 6 при $0 < q < 1$ правая часть формулы (3) стремится к пределу $1/(1-q)$. Тем самым получена формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{при } 0 < q < 1. \tag{4}$$

В частности при $q = 1/2$ формула (4) равносильна интуитивно понятному равенству

$$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots = 2.$$

## 2.3. Расходимость гармонического ряда

Рассмотрим следующую числовую последовательность $z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Её называют последовательностью частичных сумм *гармонического ряда*

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots\ .$$

Выясним, как себя ведёт (куда стремится) последовательность $\{z_n\}$ при $n \to \infty$. Очевидно, что суммы $z_n$ возрастают с увеличением $n$. Рассмотрим числа $z_n$ при $n$ вида $2^k$, $k = 1, 2, \ldots$ . Построим последовательность $\{v_n\}$, «подпирающую снизу» последовательность $\{z_n\}$. На рис. 3 изображены эти последовательности для $k = 3$ и $n = 2^3 = 8$. Из рисунка понятно, как устроена последовательность $\{v_n\}$ для произвольного натурального $n$ вида $2^k$.

$$z_8 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right).$$

$$v_8 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right).$$

**Рис. 3**

Заметим, что каждое слагаемое в правой части верхней формулы на рис. 3 не меньше соответствующего слагаемого в нижней формуле, определяющей последовательность $\{v_n\}$. Величины $v_n$ возрастают с увеличением $n$. При этом для $n = 2^k$ имеет место равенство

$$v_{2^k} = 1 + \frac{1}{2}k.$$

Следовательно, числа $v_n$ возрастают с увеличением $n$ неограниченно. Поскольку $z_n \geq v_n$, то и последовательность $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$ (говорят, что гармонический ряд *расходится*).

На первый взгляд, суммы $z_n$ похожи на частичные суммы $s_n$ геометрической прогрессии, определённые выше формулой (1): обе последовательности являются нарастающими суммами слагаемых, стремящихся к 0 с ростом $n$. Однако в случае сумм $z_n$ стремление слагаемых к нулю настолько медленное, что последовательность $z_n \to \infty$.

**Упражнения.**

1) Вычислите $z_n$ в Excel для $n = 100$.

2) Напишите программу для вычисления суммы $z_n$ при $n = 1\,000\,000$ и вычислите эту сумму.

## 2.4. Квадратный корень из 2

*Простыми* называются натуральные числа больше 1, которые делятся нацело только на самих себя и на 1. Любое натуральное число можно разложить на простые множители. Например, 700 = 2 · 2 · 5 · 5 · 7.

Как было сказано выше, *рациональными* называются числа, которые могут быть записаны в виде обыкновенной дроби $\frac{m}{n}$, где $n$ и $m$ — некоторые целые числа. Любую обыкновенную дробь можно привести к несократимому виду: надо разложить числитель и знаменатель дроби на простые множители и сократить одинаковые множители сверху и снизу. Например,

$$\frac{100}{700} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}.$$

**Упражнение.** Приведите к несократимому виду дроби $\frac{100}{350}$ и $\frac{100}{84}$.

Последователи древнегреческого философа Пифагора, жившего в VI—IV вв. до н. э., обнаружили, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, или, говоря на современном математическом языке, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом (рис. 4).

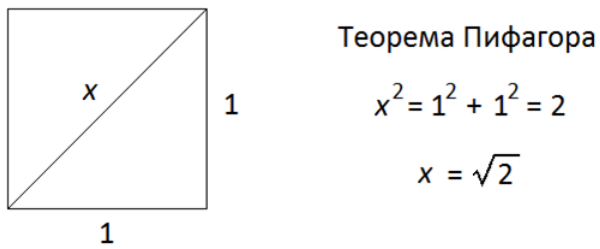


**Рис. 4**

Мало что известно с определённостью о времени и обстоятельствах этого выдающегося открытия, но традиционно его авторство приписывается Гиппасу из Метапонта, которого за это открытие, по разным вариантам легенды, пифагорейцы не то убили, не то изгнали, поставив ему в вину разрушение главной пифагорейской доктрины о том, что «всё есть (целое) число».

*Доказательство*. Допустим, что удалось представить $\sqrt{2}$ в виде несократимой обыкновенной дроби: $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Тогда $m^2 = 2n^2$. Отсюда $m^2$ — чётное число. Следовательно, и $m$ — чётное число. Положим $m = 2k$. Тогда получим равенство $m^2 = 4k^2 = 2n^2$. Отсюда $2k^2 = n^2$. Таким образом, $n^2$ — чётное число. Следовательно, $n$ — чётное число. Получено противоречие с несократимостью дроби $\frac{m}{n}$.

Что же такое $\sqrt{2}$? Для произвольного положительного числа $a$ можно определить $\sqrt{a}$ как предел следующей последовательности $\{x_n\}$, заданной *рекуррентно* (т. е. следующий член последовательности выражается с помощью определённой формулы через предыдущий):

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \text{ при } n \geq 1.$$

Здесь $x_n$ — текущее приближение к $\sqrt{a}$, $x_{n+1}$ — следующее, более точное, приближение. Сходимость этой последовательности очень быстрая. Например, для $a = 2$ имеем:

$$x_2 = 1{,}5; \; x_3 = 1{,}416667; \; x_4 = 1{,}414216; \; x_5 = 1{,}414214, \ldots.$$

**Упражнение.**

Напишите программу для вычисления $\sqrt{a}$ и вычислите с её помощью приближённое значение для $\sqrt{17}$ (возьмите $n = 100$).

## Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найти пределы при $n \to \infty$ следующих последовательностей:

а) $a_n = \dfrac{n^3}{(n+1)(n^2+2)}$;

б) $b_n = \dfrac{2^n}{3^n + (-1)^n}$;

в) $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

2.2. **Ахиллес и черепаха.** Предположим, что Ахиллес бежит со скоростью 10 м/сек, а черепаха (довольно шустрая) может ползти со скоростью 0,1 м/сек. Вначале между черепахой и Ахиллесом расстояние 100 м. В то время как Ахиллес за 10 секунд пробежит эти 100 м, черепаха успеет уползти вперёд на 1 м. Пока Ахиллес за 0,1 секунды пробежит этот метр, черепаха успеет уползти вперёд на 0,01 м и т. д. Наступит ли момент времени, в который Ахиллес догонит черепаху?

2.3. Положим

$$r_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Напишите программу для приближённого вычисления $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{6r_n}$ и вычислите приближение для $n = 1\,000\,000$.